



DİNAMİK SİSTEM DAVRANIŞLARI

Otomatik denetim sistemleri dinamik sistemlerdir. Dinamik sistemlerinde ise, biri “geçici-durum” ve diğeri de “kalıcı-durum” olmak üzere iki tür davranış görülür. Geçici-durum davranışı, sistemin belli bir dış uyarı karşısında belli bir başlangıç değerinden bir nihai duruma kadar zaman değişimine bağlı olarak gösterdiği davranıştır. Kalıcı-durum davranışı ise sistemin geçici-durum davranışı tamamladıktan sonra zaman sonsuza uzanırken koruduğu davranıştır.

Dinamik sistemlerin cevap fonksiyonu veya bağımlı değişkeni bir dış uyarı veya giriş değeri karşısında zaman değişimine bağlı bir geçici davranış gösterir ve belli bir zaman geçtikten sonra ise cevap fonksiyonu, zaman değişiminden bağımsız olarak sabit bir değere erişir. Sistem cevabında geçici-durumundan kalıcı-durumuna kadar geçen zaman, sistemin zaman sabiti veya doğal frekansı ve sönüm oranına bağlıdır. Bunlar ise sistemlerin dinamik davranışı ile ilgili temel parametrelerdir.



Geçici-durum cevabı çözümlemesinden sistemlerin bir giriş uyarısına karşı hangi hızla tepki gösterdikleri belirlenir Ayrıca bu incelemeden cevap hızının sistemin hangi temel parametrelerine bağlı oldukları da belirlenmiş olur. Bu inceleme sonucu uygun bir davranışa sahip olmayan otomatik denetim sistemlerinden daha iyi bir davranış elde etmek için neler yapılabileceği ortaya çıkar.

3.1.1 TRANSFER FONKSİYONLARININ YAPISINA GÖRE SİSTEMLER

Transfer fonksiyonlar yapısına bağlı olarak sistemleri; orantı elemanı tipinde, kapasite elemanı tipinde, zaman sabiti elemanı tipinde ve titreşim elemanı tipinde olarak sınıflandırmak mümkündür. Karmaşık yapılı bir sistem ise yukarıda sayılan türlerin bileşimi bir transfer fonksiyonuna sahip olur. Örneğin karmaşık yapıda bir sistem bir zaman sabiti elemanı ile titreşim elemanı tipindeki sistemlerin transfer fonksiyonları çarpımına eşit bir transfer fonksiyonuna veya bir kapasite elemanı ile zaman sabiti tipindeki elemanın transfer fonksiyonları çarpımı bir transfer fonksiyonuna sahip olabilir.



Bu temel elemanların genel davranış özellikleri bilinirse, bu elemanlarla yalın halde karşılaşıldığında veya bu elemanlardan ibaret bileşenlere ayrılabilen sistemlerle çalışıldığında, sonucu elde etmek ve hatta sonucu önceden kestirmek mümkün olabilir.

Bir sistemin dinamik davranışı, sistemin fiziksel yapısından bağımsız olarak o sistemin transfer fonksiyonunun karakteristik yapısına ve o sisteme uygulanan giriş (uyarı) fonksiyonu yapısına bağlıdır. Dolayısıyla bir sistemin cevap fonksiyonu (çıkış fonksiyonu) o sistemin transfer fonksiyonu ile giriş fonksiyonu çarpımına eşittir. Ters Laplace dönüşümü yoluyla cevap fonksiyonunun çözümünden elde edilen sistemin cevabı (zamana bağlı çıkış fonksiyonu) hem o sistemin transfer fonksiyonuna ve hem de giriş veya uyarı fonksiyonuna bağlı olacaktır. Bu nedenle farklı transfer fonksiyonlarına sahip sistemlerin farklı yapıda giriş fonksiyonlarına göre ayrı ayrı incelenmesi gerekir.



3.1.2. BELLİ BAŞLI STANDART GİRİŞ SİNYALLERİ

Her ne kadar, uygulamada denetim sistemlerine etki eden giriş uyarıları çoğunlukla gelişigüzel bir yapıya sahipse de sistemlerin test edilebilmesi amacı ile kullanılmak üzere bazı önemli ölçümlü (standart) giriş fonksiyonları tanımlanmıştır. Bunların belli başlılarını, basamak giriş fonksiyonu, ramp giriş fonksiyonu, parabolik (ivme) giriş fonksiyonu, ani darbe giriş fonksiyonu, sinusoidal giriş fonksiyonu olarak sayabiliriz. Bu sinyaller zamanın basit fonksiyonları olup, denetim sistemlerinin bu test sinyalleri ile matematiksel ve deneysel çözümlemeleri kolaylıkla yerine getirilir.

Sistem karakteristiklerinin incelenmesi amacı ile ölçümlü test sinyallerinden hangisinin veya hangilerinin kullanılacağı sistemin normal çalışma koşulu altında, çoğunlukla maruz kaldığı giriş uyarısının biçimine göre belirlenir. Buna göre eğer denetim sistemi normal çalışma koşulları altında başvuru giriş veya bozucu giriş uyarısı ile zamana bağlı giderek doğrusal artan bir sinyale maruz kalıyorsa test sinyali olarak ramp fonksiyonu kullanılması en uygunu olur. Benzer şekilde eğer sistem ani olarak belli bir değere kadar artan bir uyarıya maruz kalıyorsa basamak test sinyali, buna karşılık sistem ansal olarak şok uyarısına maruz kalıyorsa ani darbe test sinyali kullanılır. Bir denetim sistemini test sinyallerine göre inceledikten ve bu sinyallere göre tasarladıktan sonra sistemin gerçek giriş sinyallerine göre davranışı yaklaşık olarak belirlenmiş olur. Bu tür test sinyallerini kullanmak suretiyle aynı esasa dayanan tüm sistemlerin dinamik davranışlarını mukayese etme imkanı sağlanmış olur.



Aşağıda belirtilen giriş fonksiyonlarına sistemin gösterdiği cevap fonksiyonlarına bir bakalım.

1-Basamak(step) giriş sinyali:Bu sinyalin zaman tabanında gösterimi $r(t)=Au(t)$ ve s tabanında gösterimi $R(s) = A/s$ şeklindedir.Birim basamak giriş sinyali denildiğinde ise $r(t)=u(t)$ ve $R(s) = 1/s$ anlaşılmalıdır.

2-Ramp giriş sinyali: Bu sinyalin zaman tabanında gösterimi $r(t)=At$ ve s tabanında gösterimi $R(s) = A/s^2$ şeklindedir.Birim ramp sinyali denildiğinde ise $r(t) = t$ ve $R(s) = 1/s^2$

anlaşılmalıdır.

3-Ani darbe giriş sinyali: Bu sinyalin zaman tabanında gösterimi $r(t)=A\delta(t)$ ve s tabanında gösterimi $R(s)=A$ şeklindedir.Birim ani dabe giriş sinyali denildiğinde ise $r(t)= \delta(t)$ ve $R(s)=1$ anlaşılmalıdır.

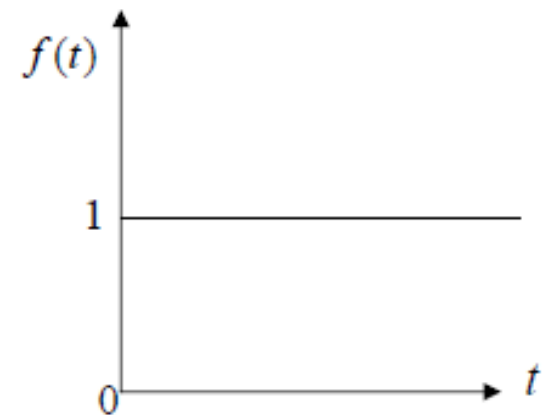


$$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

$$f(t) = 1 \quad t \geq 0$$

$$L(f) = L(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

Step Fonksiyonu





$$f(t) = at$$

$$L(f) = L(at) = a \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

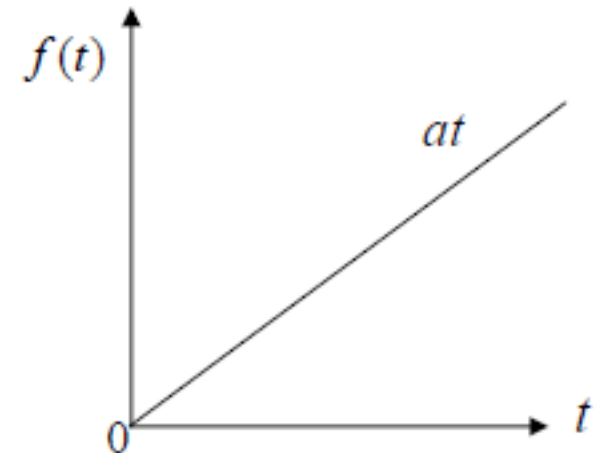
$$\begin{aligned} t &= u & dt &= du & \int u dv &= uv - \int v du \\ e^{-st} dt &= dv & -\frac{1}{s} e^{-st} &= v \end{aligned}$$

$$a \int_0^{\infty} te^{-st} dt = a \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right]$$

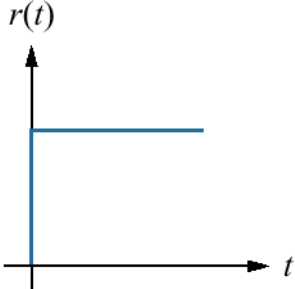
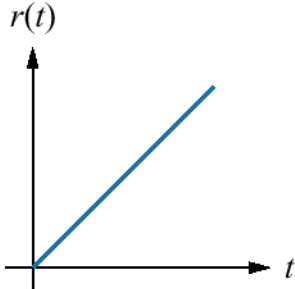
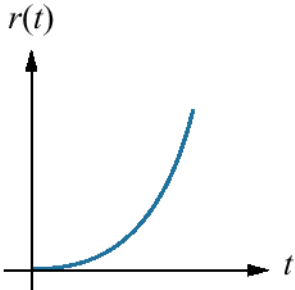
$$= -\frac{at}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \frac{a}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{a}{s^2}$$

Rampa Fonksiyonu





Waveform	Name	Physical interpretation	Time function	Laplace transform
	Step	Constant position	1	$\frac{1}{s}$
	Ramp	Constant velocity	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parabola	Constant acceleration	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$



3.2. ORANTI ELEMANI

Orantı elemanı tipinde bir sistemin transfer fonksiyonu;

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K = \text{sabit} \quad (3.1.)$$

şeklinde dir. Cevap fonksiyonu ise $C(s)=K \times R(s)$ şeklinde giriş fonksiyonu ile orantı katsayısının çarpımı olarak elde edilir. Orantı katsayısı bir sabit olduğundan cevap fonksiyonu ve buna bağlı olarak sistemin zamana bağlı cevabı giriş fonksiyonun bir katı olarak elde edilir. Örneğin giriş fonksiyonu şiddeti A olan $r(t)=Au(t)$ [$R(s) = A/s$] şeklinde bir basamak fonksiyonu ise cevap $C(t)=KAu(t)$ şeklinde şiddeti girişin K katı olan yine bir basamak fonksiyonudur.

Eğer sisteme $r(t)=At$, [$R(s) = A/s$] şeklinde ramp giriş uyarısı uygulanacak olursa cevap değeri $C(t)=KA t$ şeklinde bir ramp fonksiyonu olup sadece giriş ramp fonksiyonun A eğimi KA şeklinde arttırılmıştır.



Bir sistemin veya elemanın orantı tipi transfer fonksiyonuna sahip olması demek fiziksel olarak sistemin ani uyarılara karşı anında zamandan bağımsız olarak ansal bir tepki göstermesi demektir. Gerçekte ise hiçbir fiziksel sistem kendisine uygulanan giriş uyarısına ansal olarak cevap veremez ve mutlaka bir gecikme söz konusudur. Bu nedenle orantı tipi bir eleman bir yaklaşım olup denetim sistemi döngüsü içinde zaman gecikmesi diğer elemanların yanında ihmal edilebilecek kadar çok küçük olan sistem elemanı orantı tipi olarak ele alınabilir. Örneğin bir denetim sistemi için ortalama zaman gecikmeleri dakikalar mertebesinde olan sistem elemanları yanında zaman gecikmesi mili saniyeler mertebesinde bir eleman orantı tipi olarak ele alınabilir.

3.3. KAPASİTE VEYA İNTEGRAL ELEMANI

Kapasite elemanı tipinde sistemin transfer fonksiyonu,

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T_i s} \quad (3.2.)$$

şeklindedir.



Denetim sistemi uygulamalarında bir hidrolik valf-silindir düzenlemesinden ibaret sistemde $1/T_i s$ şeklinde transfer fonksiyonuna sahiptir. Bu tür elemanların temel özeliği çıkış fonksiyonu giriş fonksiyonunun integrali şeklinde olmasıdır. Bu nedenle bu tür elemanlar **integral alıcı** olarak bilinir. **T_i sabiti ise integral zaman sabitidir.** Denetim sistemi içinde yer alan integral elemanı transfer fonksiyonuna $1/s$ çarpanı getirir. Bu ise orjinde yer alan bir kutup demektir. Sistemin dinamik davranışı açısından ise kalıcı-durum hatasının azalması ve sıfırlanması, buna karşılık da sistemin kararsızlığa doğru yatkınlığını doğurur.

Kapasite elemanına birim basamak girişi $R(s) = 1/s$ uygulandığında çıkış fonksiyonu $C(s) = (1/T_i s)(1/s)$ şeklindedir. Kapasite elemanına birim ramp girişi $R(s) = 1/s^2$ uygulandığında ise çıkış fonksiyonu $C(s) = (1/T_i s)(1/s^2)$ şeklindedir.

3.4. ZAMAN SABİTİ VEYA BİRİNCİ DERECEDEKİ SİSTEMLER

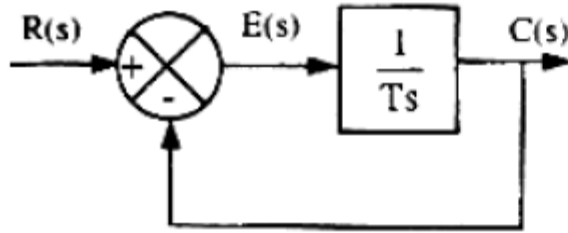
Zaman sabiti elemanı, diferansiyel denklemi birinci dereceden olan bir sistemi temsil eder.

Zaman sabiti elemanın transfer fonksiyonun genel yapısı:

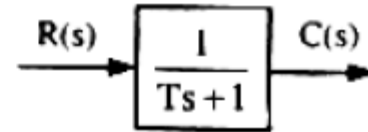
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T_i s + 1} \quad (3.3.)$$



Zaman sabiti elemanı tipinde çalışan kapalı-döngü sistemin şeması Şekil 3-1a'da verildiği gibi olur. Sistemin indirgenmiş blok şeması Şekil 3-1b'de verilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 3-1 Birinci dereceden sistemin blok şeması

Zaman sabiti elemanın girişine birim-basamak, birim-ramp ve birim anidarbe sinyalleri uygulanarak cevap davranışı incelenecektir. Fiziksel yapısı ne olursa olsun, zaman sabiti tipinde transfer fonksiyonuna sahip sistemler aynı giriş karşısında aynı dinamik davranışları gösterirler. Verilen herhangi bir fiziksel sistem için matematiksel cevap elde edildikten sonra sistemin fiziksel yapısına göre yorum yapılır.

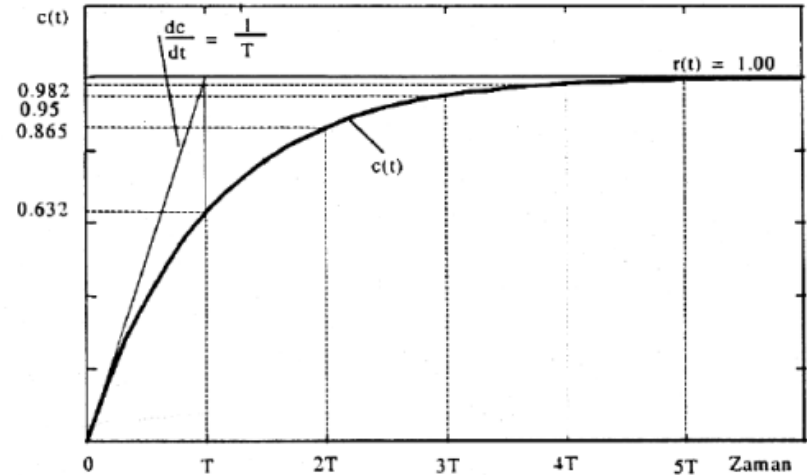
3.4.1. ZAMAN SABİTİ ELEMANIN BİRİM BASAMAK GİRİŞ CEVABI

$r(t)=u(t)$ birim basamak fonksiyonun s tabanındaki gösterimi $R(s)=1/s$ olduğuna göre cevap fonksiyonu

$$C(s) = \frac{1}{(Ts + 1)s}$$

elde edilir. Zaman tabanındaki cevap fonksiyonu ise

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$



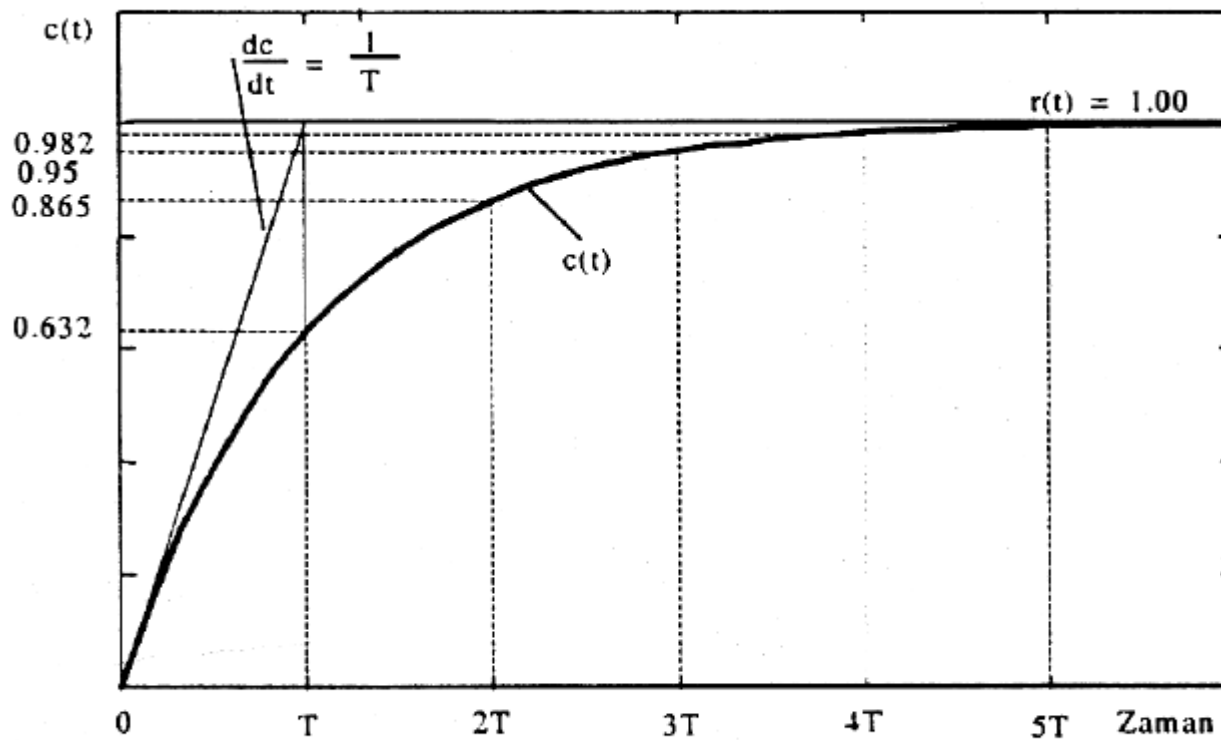
Şekil 3-2 Birinci dereceden sistemin cevap eğrisi

şeklindedir. Denklem (3.5.)'e göre cevap $t=0$ başlangıç değerinde sıfır ve $t = \infty$ nihai değerinde birim değere eşittir. $c(t)$ üstel fonksiyonunda $t \rightarrow 0$ den $t \rightarrow \infty$ kadar t 'ye değerler vererek karşılık gelen $c(t)$ değerleri çizilirse Şekil 3-2'deki cevap eğrisi elde edilir. Bu tür üstel bir eğrinin en önemli karakteristiği ise $t=T$ da $c(t)$ nin 0,632'ye eşit olması veya diğer bir deyişle $c(t)$, cevabının ulaşması gerektiği nihai değerinin % 63,2'ye ulaşmış olmasıdır. Buna $c(t)$ denkleminde $t=T$ koyarak;



$$c(t) = 1 - e^{-1} = 0,632$$

şeklinde elde edebiliriz. Burada T zaman sabiti olup birinci dereceden sistemlerin dinamik davranışı ile ilgili temel bir parametredir. Buna göre bir sistemin zaman sabiti ne kadar küçükse, cevabı o kadar hızlıdır.



Şekil 3-2 Birinci dereceden sistemin cevap eğrisi



3.4.2.ZAMAN SABİTİ SİSTEMLERİN BİRİM RAMP GİRİŞ CEVABI

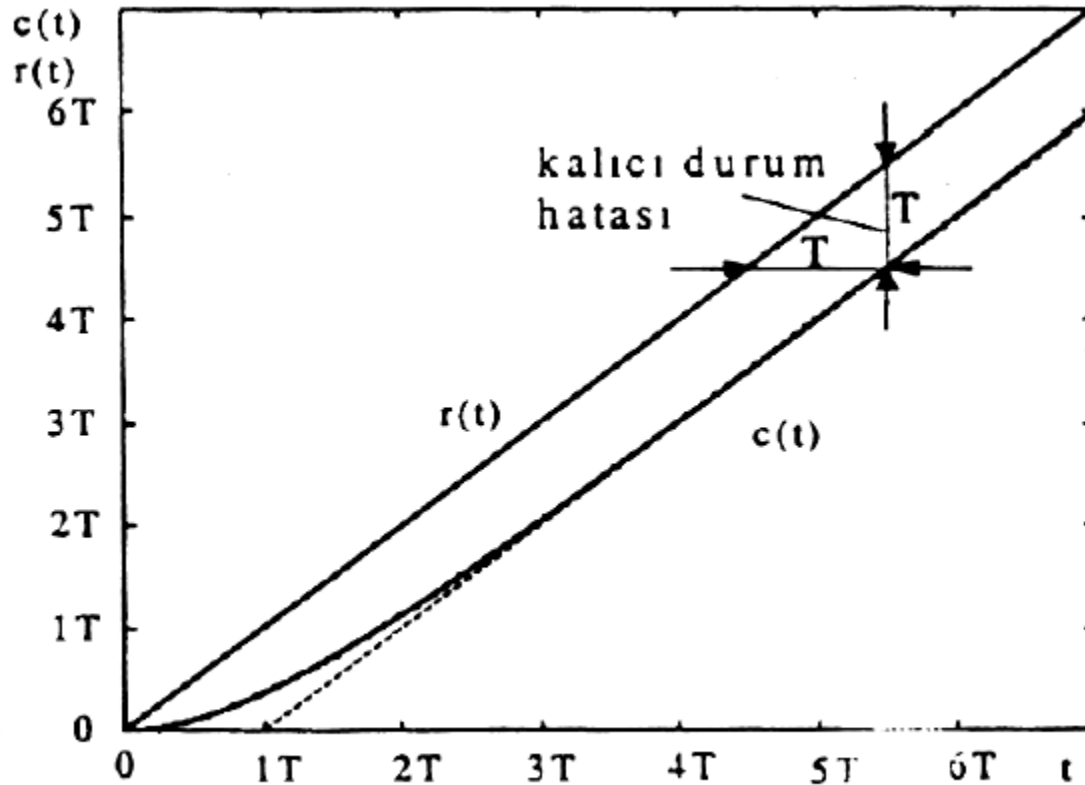
Birim ramp girişi s tabanında $R(s)1/s^2$ olduğuna göre zaman sabiti sistemin ramp giriş cevap fonksiyonu

$$C(s) = \frac{1}{(Ts + 1)} \frac{1}{s^2} \quad (3.6.)$$

Bu sistemin zaman tabanında cevap fonksiyonu $c(t)$ ise

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (3.7.)$$

olur. (3.7.) nolu denklemde $t \rightarrow 0$ den $t \rightarrow \infty$ kadar değerler vererek karşılık gelen cevap eğrisini $c(t)$ Şekil 3-3'teki gibi elde ederiz.

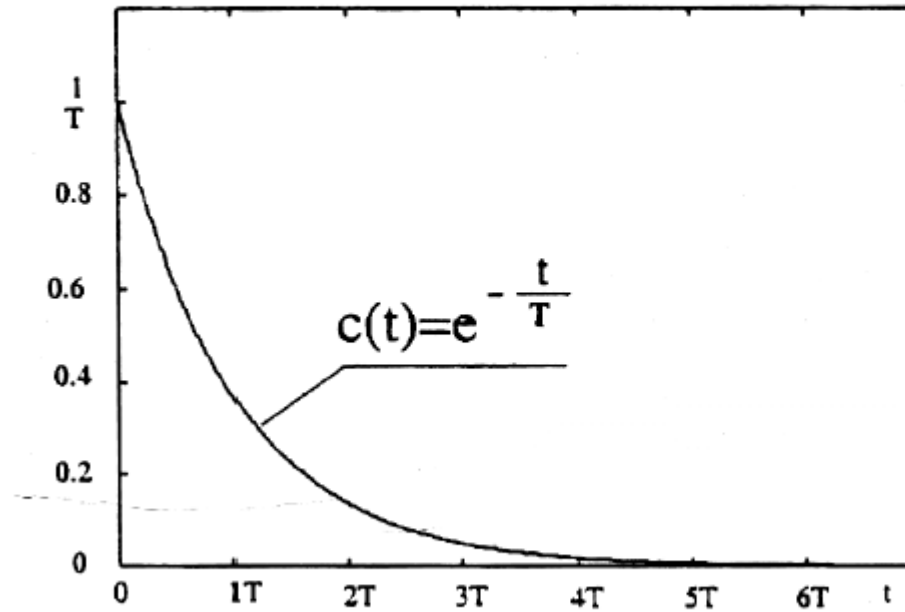


Şekil 3-3 Birinci dereceden sistemin birim ramp cevabı

3.4.3. ZAMAN SABİTİ SİSTEMLERİN BİRİM ANIDARBE GİRİŞ CEVABI

Birim anidarbe fonksiyonu s tabanında $R(s)=1$ olduğuna göre cevap fonksiyonu şöyledir:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad (3.9.)$$



Şekil 3-4 Birinci dereceden sistemin birim anidarbe cevabı

(3.9.) denkleminde $t \rightarrow 0$ den $t \rightarrow \infty$ kadar değerler verirsek Şekil 3-4'de görülen cevap eğrisi elde edilir. Sistem bir anidarbe giriş uyarısı karşısında sabit değerden başlayarak, kararlı ise zaman sonsuza giderken üstel olarak başlangıç durumuna geri döner.



3.5. TİTREŞİM ELEMANI TİPİ VEYA İKİNCİ DERECEDEN SİSTEMLER

Titreşim eleman tipi diferansiyel denklemi ikinci dereceden olan bir sistemin özel halidir. Titreşim elemanı sistemin transfer fonksiyonunun genel yapısı

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (3.10.)$$

veya $T=1/\omega_n$ yazılarak

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.11.)$$

şeklindedir. Burada ω_n [rad/s] sistemin doğal frekansı, ζ sönüm oranı, T açısal periyoddur. Doğal frekans ω_n ve sönüm oranı ζ ikinci dereceden sistemin dinamik davranışı ile ilgili iki temel parametredir. Sönüm oranı, sistemin sönüm katsayısının kritik sönüm kat sayısına oranı olarak tanımlanır.



İkinci dereceden sistemin dinamik davranışı ω_n ve ζ olmak üzere iki parametre cinsinden tanımlandığına göre özyapısal denklemin çözümünden bu iki parametrenin etkisini inceleyebiliriz.

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.12.)$$

(3.12.) nolu özyapısal denklemin kökleri ise;

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4.1.\omega_n^2}}{2.1} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4.1.\omega_n^2}}{2.1}$$

Sönüm oranı ζ 'nin alacağı değere göre özyapısal denklemin kökleri (veya sistemin kutupları) gerçekte veya karmaşık eşlenik olabilir. Sönüm oranının değerine bağlı olarak köklerin durumunu ve buna bağlı olarak sistemin göstereceği dinamik davranışı aşağıdaki şekilde belirleyebiliriz.



- a) $0 < \zeta < 1$ ise: $s_{1,2}$ kökleri karmaşık eşlenik olup s düzleminin sol tarafında yer alırlar. Dinamik davranışı açısından sistem sönümlü titreşimli veya az sönümlü adını alır. Bu durumda kökler

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

şeklinde ifade edilir.

- b) $\zeta = 1$ ise: kökleri gerçekte ve birbirine eşit olup $s_{1,2} = \pm\omega_n$ dir. Sistem dinamik davranışı açısından kritik sönümlüdür. Cevap eğrisi titreşim göstermez.

- c) $\zeta > 1$ ise: $s_{1,2}$ kökleri farklı negatif değerli gerçekte olup

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

eşittir. Dinamik davranışı açısından sistem titreşimsiz olup aşırı sönümlüdür. Cevap hızı yavaştır.

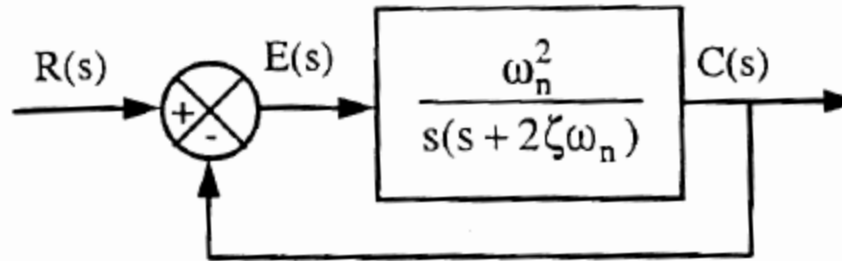
- d) $\zeta = 0$ ise: $s_{1,2}$ kökleri eşlenik sanal olup sanal eksen üzerinde yer alırlar. $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ olur. Sistem sönümsüz titreşimli dinamik davranış gösterir.



Kapalı-döngü çalışan titreşim elemanı tipinde sistemin blok şeması Şekil 3-5'de verildiği gibidir. Buradan sistem transfer fonksiyonu ise

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.13.)$$

olur.



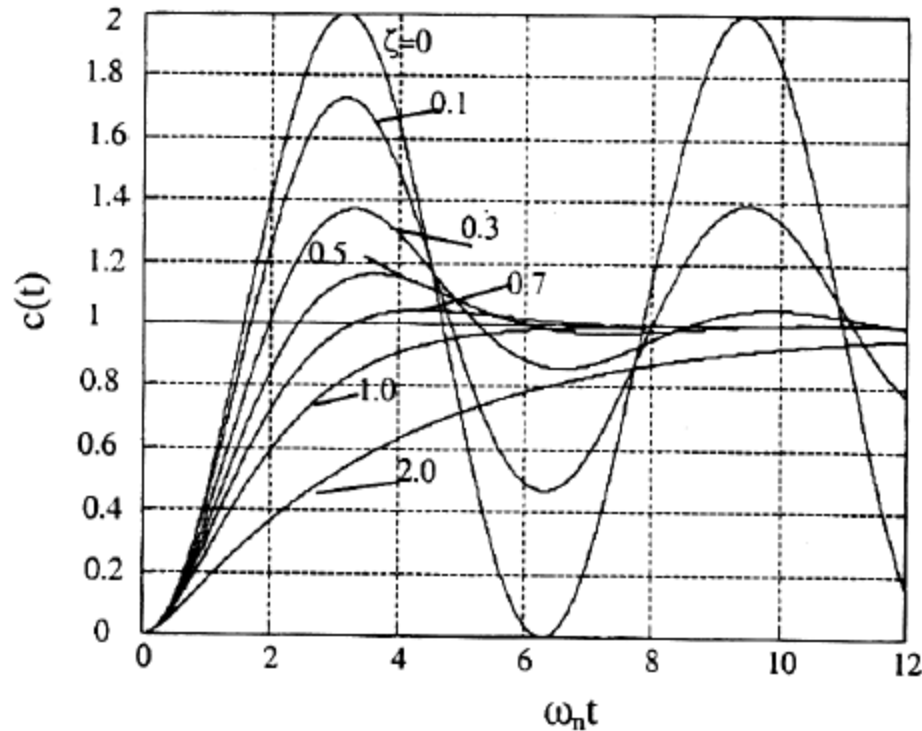
Şekil 3-5 İkinci dereceden sistem

3.5.1 İKİNCİ DERECEDEKİ SİSTEMİN BASAMAK GİRİŞ CEVABI

Birim basamak fonksiyonu $R(s)=1/s$ olarak tanımlandığına göre cevap fonksiyonu (3.13.) nolu denklemden

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s}$$

olarak elde edilir.



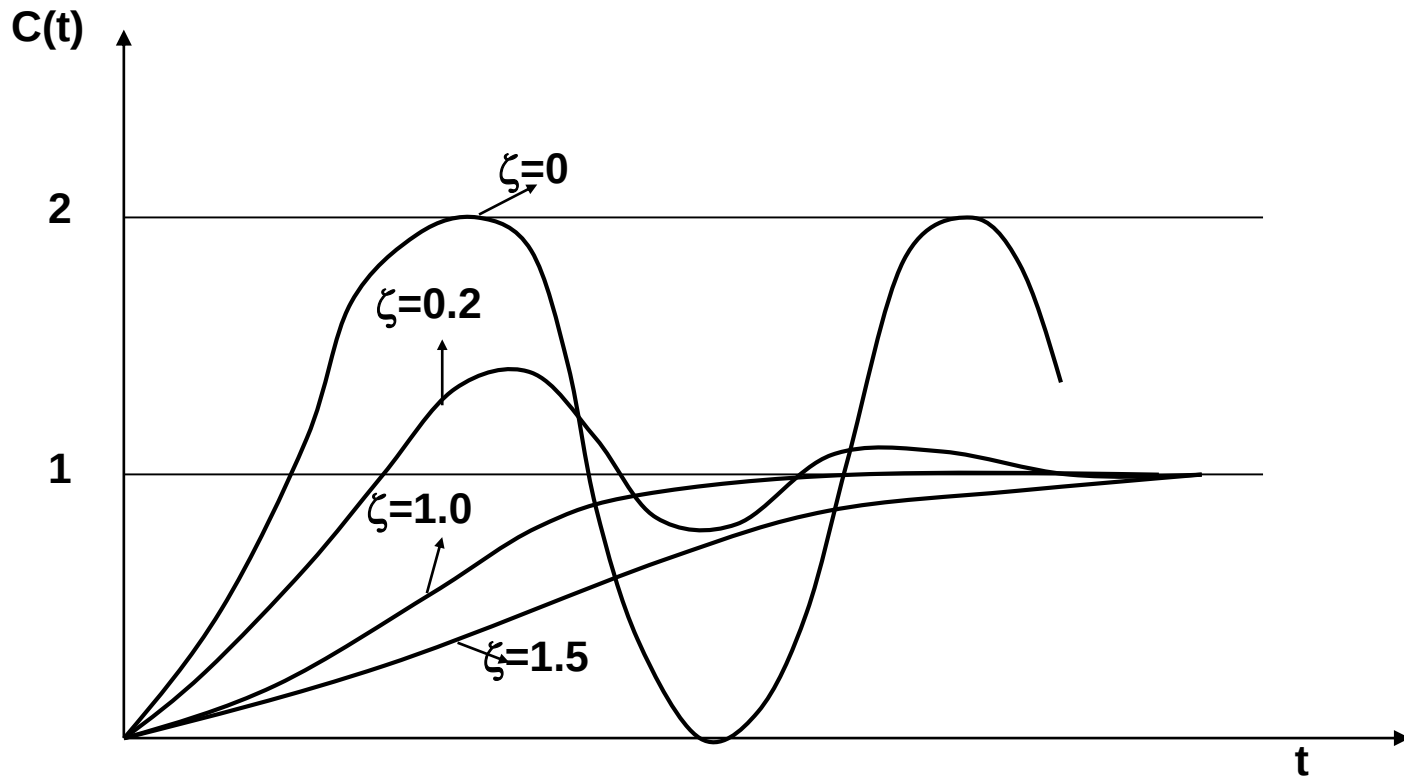
Şekil 3-6 İkinci dereceden sistemin basamak cevabı



Ters Laplace dönüşümü,

$$C(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

olarak bulunur.





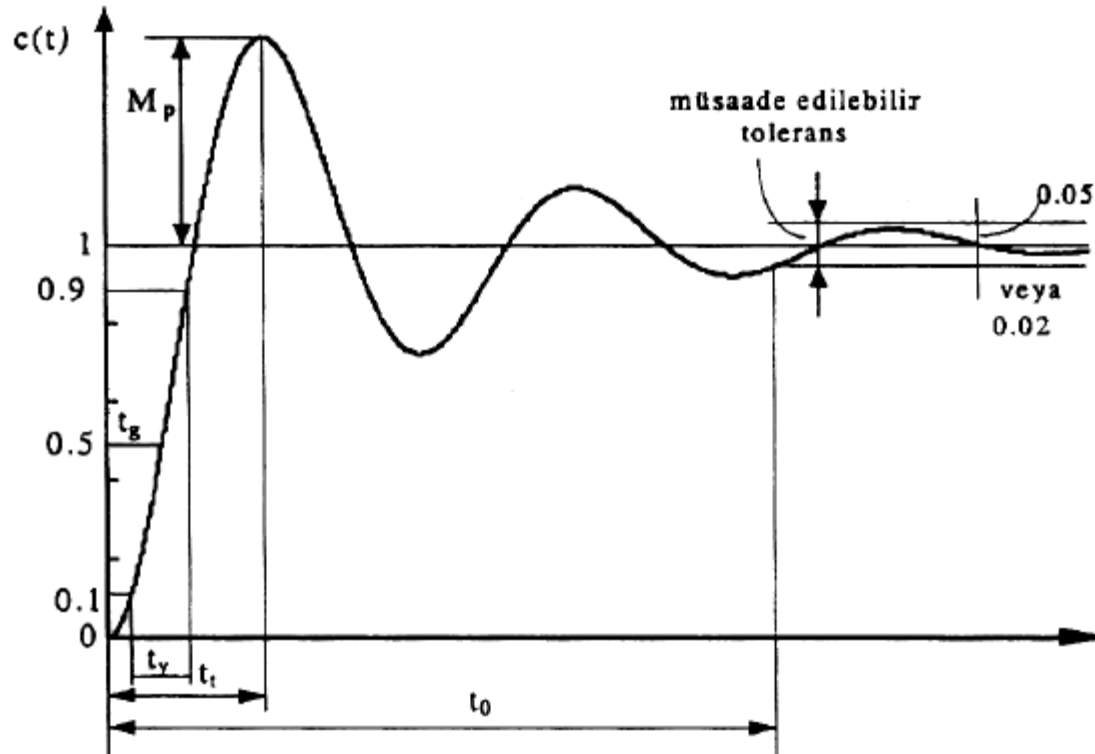
Değişik ζ değerlerine karşılık gelen eğriler Şekil 3-6'da verilmiştir. Eksen takımının yatay eksenini boyutsuz değişken $\omega_n t$ 'ye göre ölçeklendirilmiştir. Eğriler yalnızca ζ 'nın fonksiyonlarıdır.

Aynı sönüm oranına ζ fakat farklı doğal frekans ω_n değerlerine sahip iki adet ikinci dereceden sistemin zaman tabanında cevabı $c(t)$ aynı aşma ve aynı tip titreşim biçimi gösterir. Bu tür sistemlere **aynı bağıl kararlılığa sahip sistemler** denir.

Şekil 3-6'dan, sönüm oranının, $\zeta = 0,5$ ile $0,8$ değerlerine karşılık gelen titreşimli sönümlü bir sistemde cevap fonksiyonu, $c(t)$ nihai değerine, kritik sönümlü veya aşırı sönümlü sisteme göre daha hızlı şekilde eriştiği görülmektedir. Titreşimsiz dinamik davranış gösteren sistemler arasında kritik olarak sönümlü bir sistem daha hızlı cevap ortaya koyar. Aşırı sönümlü bir sistemin cevap hızı ise daima yavaştır.

Şekil 3-6'da verilen cevap eğrilerinden gözlenen diğer bir durum ise cevabın niha $\zeta < 1$ durumunda olması gerektiği değere hatasız olarak ulaşmasıdır. Sönüm oranının durumlarına karşılık gelen titreşimli cevap eğrileri ilk önce birim nihai değerini aşarak daha sonra da nihai değer civarında şiddeti zamana bağlı olarak azalan sabit periyodlu salınımlar yapmaktadırlar. Belli bir zaman geçtikten sonra ise titreşimleri tamamen ortadan kalkarak cevap eğrisi nihai değerine oturmaktadır. Sönüm oranının $\zeta > 1$ durumlarına karşılık gelen cevap eğrisi ise nihai değerine hiçbir titreşim hareket yapmadan hatasız olarak ulaşmaktadır.

3.6.GEÇİCİ-DURUM DAVRANIŞ ÖZELLİKLERİ İLE İLGİLİ TANIMLAR



Şekil 3-7 Zaman alanı cevabı parametreleri

aşağıda belirlenen parametreler tanımlanabilir. Bu parametreler sistemin geçici-durum davranışını belirleyen temel parametrelerdir.



a) Gecikme zamanı, t_g : Gecikme zamanı, cevabın nihai değerinin yarısına ilk defa ulaşması için geçen zamandır. Birinci dereceden gecikmeli sistemlerde gecikme zamanı, t_g zaman sabiti T 'ya eşittir.

b) Yükselme zamanı, t_r : Yükselme zamanı, cevabın nihai değerinin %10'dan %90'ına, %5'ten % 95'ine veya %0'dan %100'üne kadar ulaşması geçen zamandır. Aşırı sönümlü birinci dereceden sistemler için %0-100 yükselme zamanı kullanılır. Titreşimli sönümlü sistemlerde ise genel olarak %10-90 yükselme zamanı kullanılır.

d) Maksimum aşma, M_p : Maksimum aşma cevap eğrisinin nihai değerinde erişmesi gerektiği birim değerden ölçülen maksimum tepe değeridir. Eğer cevabın nihai kalıcı-durum değeri birim değerden farklı ise, aşağıdaki formül ile tanımlanan maksimum aşmanın yüzde değeri kullanılır.

$$\text{Maksimum aşma yüzdesi, } \% M_p = \% \frac{c(t_r) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100 \quad (3.14.)$$

Maksimum aşmanın miktarı doğrudan doğruya sistemin bağıl kararlılığını belirler. Birinci dereceden gecikmeli sistemlerde cevap eğrisi hiçbir zaman olması gerektiği nihai değeri aşmadığından maksimum aşma tanımlanmaz, sıfırdır.



e) Oturma zamanı, t_0 : Oturma zamanı, cevap eğrisinde titreşim genliklerinin müsaade edilebilir tolerans değeri sınırlarına erişmesi için geçen zamandır. Müsaade edilebilir tolerans değerleri ise genellikle nihai değerin % 5 veya % 2 lik aşma değerleri olarak tanımlanır. Oturma zamanı denetim sisteminde tanımlanan en büyük zaman sabitidir. Birinci dereceden gecikmeli sistemlerde oturma zamanı yükselme zamanına eşittir.

Yukarıda tanımlanan sistemin zaman tabanındaki cevabı ile ilgili özellikler sistemlerin uygun cevap hızlarına göre tasarımlarında büyük önem arz ederler. Eğer t_g , t_y , t_t , M_p ve t_0 değerleri belirlenebilirse sistemin cevap eğrisinin biçimi hemen hemen saptanabilir.

Burada tanımlanan tüm özelliklerin verilen herhangi bir duruma uygulanması gerekli değildir. Örneğin aşırı sönümlü ikinci derece ve birinci derece sistemler için tepe zamanı ve maksimum aşma tanımları uygulanmaz.

3.6.1.İKİNCİ DERECEDEKİ SİSTEM PARAMETRELERİ İLE GEÇİCİ DURUM CEVABI ÖZELLİKLERİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

-Tepe zamanı, t_t , ζ ve ω_n arasındaki bağıntı:

$$t_t = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.15)$$



-Maksimum aşma M_p , ζ ve ω_n arasındaki bağıntı:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (3.16.)$$

Örnek:

$$T(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$$

Yukarıda transfer fonksiyonu verilen sistemin

-tipini,

-doğal frekansını (ω_n),

-sönüm oranını (ξ) belirleyiniz.

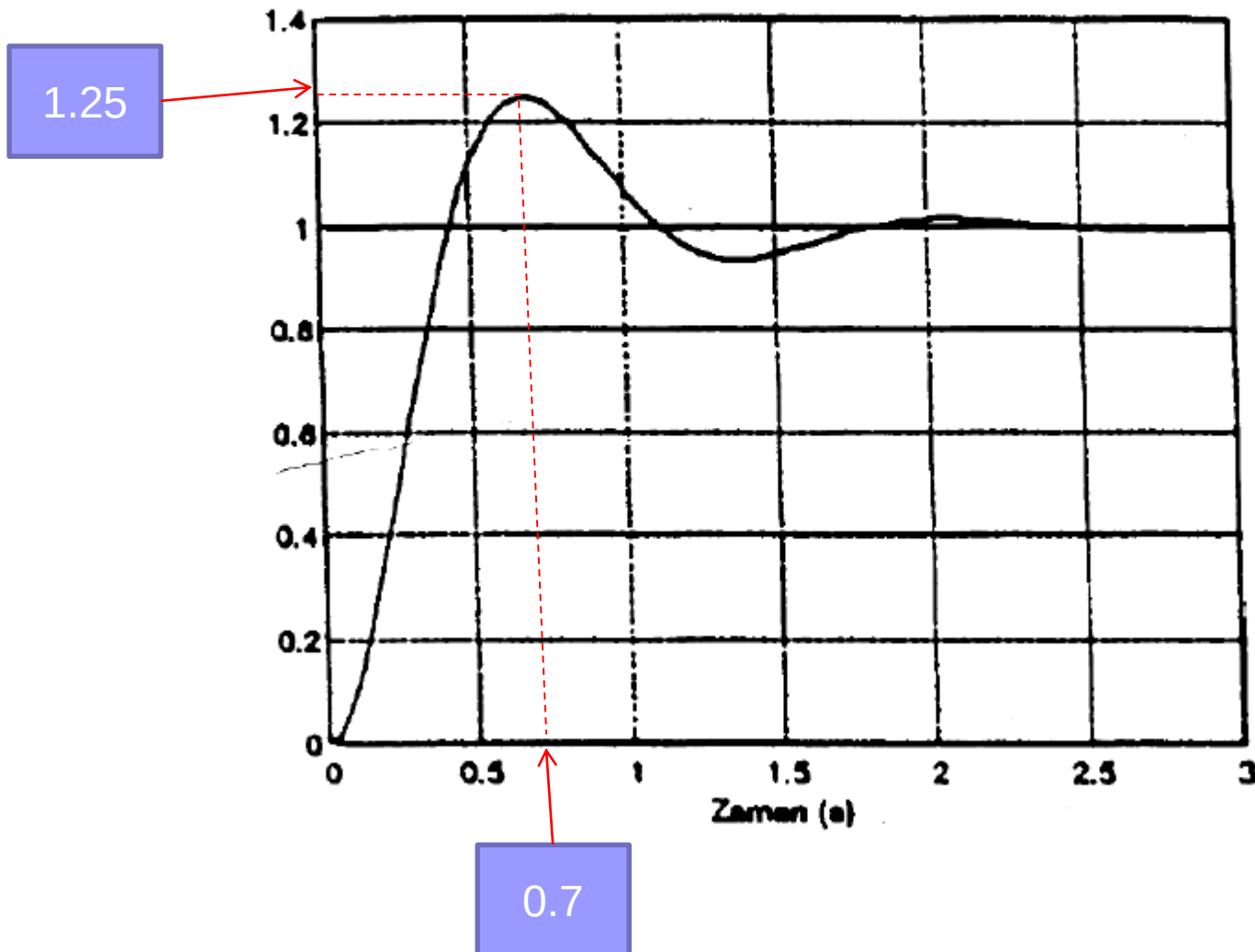
Çözüm: Transfer fonksiyonunun paydası 2. dereceden fonksiyon olduğu için bu sistem 2. dereceden bir sistem olup tipi titreşim elemanı tipidir.

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \omega_n^2 = 25 \quad \text{ve} \quad \omega_n = 5 \text{ rad/s}$$

$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ denklemini transfer fonksiyonun paydası olan $s^2 + 5s + 25$ ile eşleştirelim;

$$2\zeta\omega_n = 5 \rightarrow 2\zeta 5 = 5 \rightarrow \zeta = 0,5$$

Örnek: Aşağıdaki şekilde 2. dereceden bir sistemin birim basamak cevap eğrisi verilmiştir. Bu eğriye göre sistemin doğal frekans ve sönüm oranını bulunuz.





Çözüm: Yukarıdaki değere göre sistemin tepe zamanı (t_t) yaklaşık olarak 0,7 sn olup, tepe zamanında aldığı değer $[c(t_t)]$ de yaklaşık olarak 1,25'dir. Buna göre sistemin maksimum aşma değeri (M_p),

$$M_p = \frac{c(t_t) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

Birim basamak giriş sinyali kullanılan bir sistemin sonsuz zaman sonunda çıkış değeri 1'dir. $[c(\infty)]=1$ Dolayısıyla,

$$M_p = \frac{c(t_t) - 1}{1} = c(t_t) - 1 = 1,25 - 1 = 0,25$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow 0.25 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Yukarıdaki işlemin doğal logaritmasını alırsak,



$$\ln 0.25 = \ln e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$-1.386 = -\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Bu işlemde her iki tarafın karesini alırsak,

$$(-1.386)^2 = \left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)^2$$

$$1.921 = \frac{\zeta^2 \pi^2}{(1-\zeta^2)}$$

→ Her iki tarafı π^2 ye bölersek;

$$0.1947 = \frac{\zeta^2}{(1-\zeta^2)}$$

$$0.1947(1-\xi^2) = \xi^2$$

$$0.1947 - 0.1947 \xi^2 = \xi^2$$

$$0.1947 = 1.1947 \xi^2$$

$$\xi^2 = \frac{0.1947}{1.1947} = 0.1629 \rightarrow \xi = \sqrt{0.1629} = 0.403$$



Bu sistemin sönüm oranı 0,403 olup, bu değer 0 ile 1 arasında bir değer olduğundan bu sistem dinamik davranışı açısından titreşimli sönümlü (az sönümlü) bir sistemdir.

Doğal frekansı ise;

$$t_t = \frac{\pi}{W_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \text{ Formülünü kullanarak bulabiliriz.}$$

$$t_t = 0.7 \text{ sn} \quad \text{ve} \quad \xi = 0.403 \text{ ise}$$

$$0.7 = \frac{\pi}{W_n \sqrt{1 - (0.403)^2}} \text{ ise}$$

$$W_n = \frac{\pi}{0.7 \times 0.915}$$

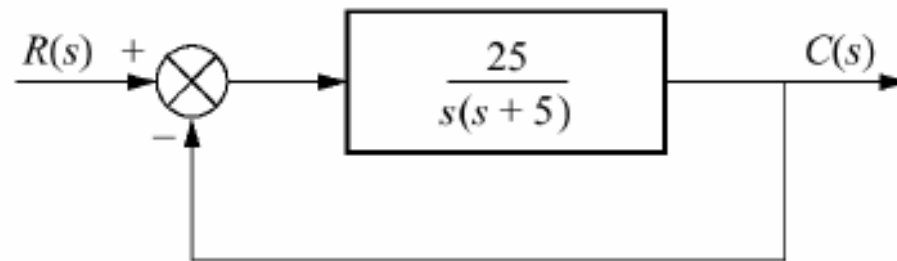
$$W_n = 4.90 \text{ rad/s}$$



Geçici Hal Cevabının Bulunması

Örnek: Şekilde gösterilen sistem için tepe zamanı T_p , yüzde üst aşımı %OS ve yerleşme zamanını T_s bulunuz.

Çözüm:



$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s).H(s)} \longrightarrow T(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{b} = \sqrt{25} = 5 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \xi = \frac{5}{2.5} = 0,5$$



Sistem az sönümlü bir cevap üretir.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0,726s \Rightarrow \%OS = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \cdot 100 = 16,303$$

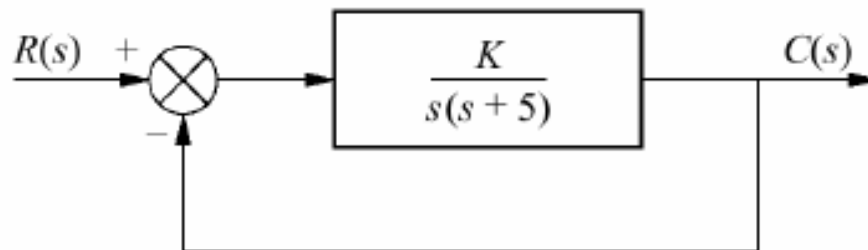
$$T_s \cong \frac{4}{\xi\omega_n} = 1,6s$$



Geçici Zaman Cevabı İçin Kazanç Tasarımı

Örnek: Şekil 'de verilen geri beslemeli kontrol sistemi için K kazancını öyle tasarlayın ki sistem %10 O.S ile cevap versin.

Çözüm:



Kapalı çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + K}$$



$$\omega_n = \sqrt{K} \rightarrow 5 = 2\xi\omega_n$$

$$\xi = \frac{5}{2\sqrt{K}} \quad \%OS = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \cdot 100$$

$$\%10 = e^{\frac{-5\pi}{2\sqrt{K}\sqrt{1-\frac{25}{4K}}}} \cdot 100$$

$\xi = 0,591$ $K = 17,9$ olarak bulunur.



2.3. BASİT SİSTEM ELEMANLARI VE BENZERLİK

Bu kısımda elektriksel sistemlere ait basit elemanlarda neden(giriş),sonuç(çıkış) bağıntıları incelenecektir. Tüm bu sistemlerde enerjiyi kapasitif etkiye depolayan sığa (kapasitans), enerjiyi endüktif etkiyle depolayan indüktans ve enerjiyi yutan veya dağıtan direnç elemanları aynı ortak özelliklere sahiptir. Kapasitans, indüktans ve direnç olarak bilinen bu iki uçlu elemanlarda iç değişken ve uç değişken olmak üzere iki temel değişken tanımlanır.

İç Değişken: Bir elemanın, boyunca her bir noktasında aynı değerde ölçülen değişkendir. İç değişken, bir fiziksel sistemde ilgili fiziksel devre açılıp araya bir ölçü aleti yerleştirilerek ölçülür. Buna göre; elektriksel sistemlerde akım bir iç değişkendir.

Uç Değişken: Bir elemanın iki ucu arasında bir fark değer olarak ölçülen değişkendir. Uç değişken ilgili elemanın uçları arasında bir ölçü aleti koyarak ölçülür. Buna göre, elektriksel sistemlerde gerilim farkı (voltaj), bir uç değişkendir.



İç değişken ve uç değişken tanımına dayanarak değişik sistemler için temel büyüklük olan güç ifadesini;

$$\text{Güç} = \text{İç Değişken} \times \text{Uç Değişken} \quad (2.5.)$$

şeklinde yazabiliriz.

Çeşitli sistemlerde basit elemanların değişkenleri arasındaki fiziksel bağıntıların benzer olması bu elemanlara ait matematiksel modeli aynı kılmaktadır. Bu durum ise sistemler arasındaki temel benzerlikleri ortaya koymaktadır. Basit elemanların ardışık ve koşut olarak bağlanması ile ortaya çıkan karmaşık sistemlerin matematiksel modelleri de kolayca elde edilmektedir.

Burada ele alınan sistem elemanları idealleştirilmiş elemanlar olup iç değişkenleri ile uç değişkenleri arasında doğrusal bağıntılar verirler. Gerçekte ise bu elemanların değişkenleri arasındaki bağıntılar tam olarak doğrusal değildir. Fakat belli bir çalışma bölgesi için doğrusal bağıntılar sistemler temel dinamik davranışları hakkında iyi sonuçlar vermektedir.



2.3.1. ELEKTRİKSEL SİSTEM ELEMANLARI

İki uçlu basit elektriksel elemanlar olarak direnç, kapasite ve indüktansı sayabiliriz. Bunlar enerjiyi depolayan veya yutan edilgen (pasif) elemanlardır. Elektriksel sistemlerde ayrıca enerjiyi modüle eden kuvvetlendiriciler ve başka bir enerji türünü elektriksel enerjiye dönüştüren dönüştürgeçler şeklinde çok uçlu elemanlar da mevcuttur.

a) Direnç Elemanı: Bir direnç elemanının uçlarına bir gerilim farkı, e uygulanırsa bir elektriksel akımı i meydana gelir. Ohm yasasına göre;

$$e = iR \quad \text{veya} \quad R = \frac{\Delta e}{\Delta i} = \frac{de}{di} \quad (2.6.)$$

olarak ifade edilir.

İdeal direnç elemanında R direnci sabittir ve akım ile gerilim farkından bağımsızdır. Bir direnç elemanı üzerinden neden (giriş) olarak bir akım uygularsak sonuç (çıkış) olarak bir gerilim farkı alırız. Aksi durumda gerilim farkı uyguladığımızda sonuç olarak akım alırız. Bunlara ait transfer fonksiyonları sırası ile,

$$\frac{E(s)}{I(s)} = R \quad \text{veya} \quad \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{R} \quad (2.7.)$$



b) Kapasite Elemanı: Şekil 2-2'deki ideal bir kondansatörün uçlarına bir potansiyel fark uygulanırsa meydana gelen elektrik yükü q (coloumb) ile kapasite C (farad) arasındaki bağıntı;

$$q = C \cdot e \quad (2.8.)$$

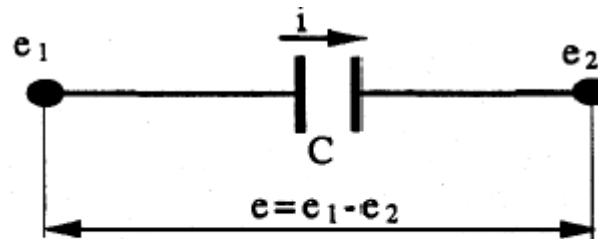
şeklindedir. Her iki tarafın türevini alacak olursak,

$$\frac{dq}{dt} = i = C \frac{de}{dt} \quad (2.9.a.)$$

veya

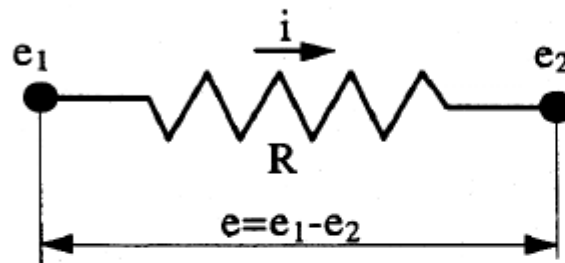
$$e = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.9.b.)$$

elde edilir ve burada $i = dq/dt$ birim zamanda akan elektrik yükü veya kısaca elektrik akımı olarak tanımlanır.

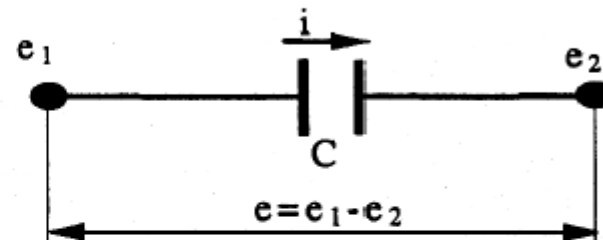


Şekil 2-2 Kapasite elemanı

Kapasite elemanı için girişin gerilim farkı veya çıkışın akım olarak tanımlanması halinde ortaya çıkacak transfer fonksiyonları (2.10.) denkleminde de yararlanarak sırasıyla



Şekil 2-1 Direnç elemanı



Şekil 2-2 Kapasite elemanı

$$\frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \quad \text{veya} \quad \frac{I(s)}{E(s)} = Cs \quad (2.10.)$$

şeklinde elde edilir.



c) İndüktans Elemanı: İletken bir telden meydana gelmiş bir sargıdan (bobin) bir akım geçirilecek olursa bir mıknatıs alanı oluşur ve akım zamanın fonksiyonu olarak değiştirilince de mıknatıs alanın yoğunluğu da zamana bağlı olarak değişir. Lenz yasasına göre, değişen mıknatıs alanı ise iletken sargı içinde akım değişimine karşı koyacak yönde bir gerilim farkı meydana getirir. İdeal bir endüktif eleman için

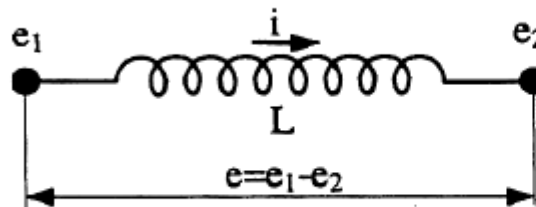
$$e = L \frac{di}{dt} \quad (2.11.)$$

yazılır ve burada L: Henry cinsinden sargının indüktansıdır. (2.11.) nolu denkleme göre bu basit elemanın transfer fonksiyonu

$$\frac{E(s)}{I(s)} = Ls \quad (2.12.)$$

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Ls} \quad (2.13.)$$

elde edilir.



Şekil 2-3 İndüktans elemanı



$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad v(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad \frac{1}{Cs}$$



$$v(t) = Ri(t) \quad i(t) = \frac{1}{R} v(t) \quad v(t) = R \frac{dq(t)}{dt} \quad R$$



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau \quad v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} \quad Ls$$



SİSTEM MODELLEME

Fiziksel sistemlerin dinamik davranışının belirli yöntemlerle elede edilen denklemlerle veya denklem setleri ile gösterilmesine matematik modelleme olarak ifade ediyoruz. Kontrol mühendisliğinde diferansiyel denklemler sistemlerin modellenmesinde en çok kullanılan denklemlerdir.

$$a \frac{dx}{dt} + bx = cy(t)$$

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = ey(t)$$

Modellemede kullanılan yöntemler:

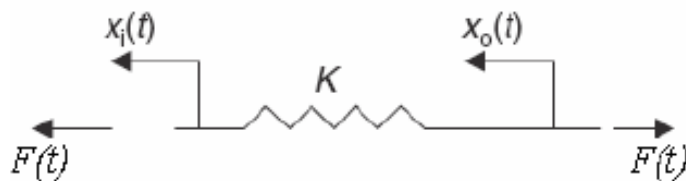
- 1-Analitik yöntemler
- 2-Nümerik yöntemler
- 3-Deneysel yöntemler



MEKANİK SİSTEMLERİN MODELLENMESİ

Elastik Eleman: Uygulanan kuvvetle veya momentle orantılı olarak belli bir uzama yada büzülme gösteren elemanlardır.

Lineer yay

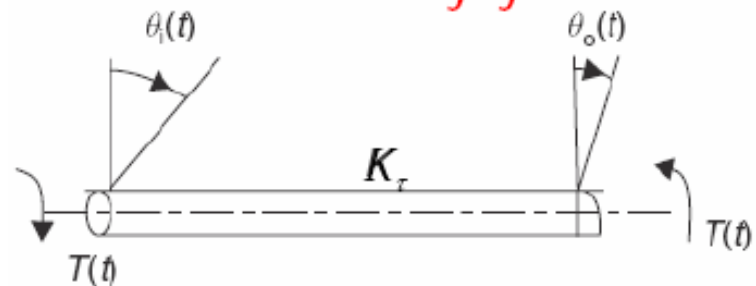


$$x_i(t) > x_o(t)$$

$$F(t) = K(x_i(t) - x_o(t))$$

K : yay katsayısı (katılık) N/m

Torsional yay

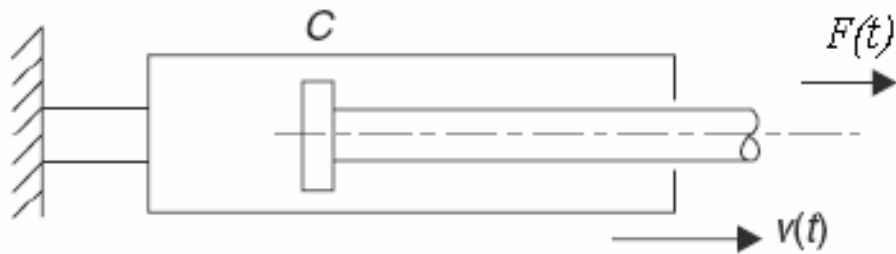


$$\theta_i(t) > \theta_o(t)$$

$$T(t) = K_r(\theta_i(t) - \theta_o(t))$$

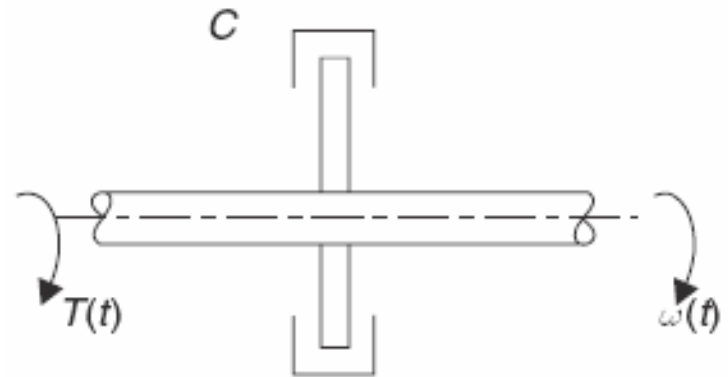
K_r Nm/rad

Sönüm Elemanı:



$$F(t) = Cv(t) = C \frac{dx_0}{dt}$$

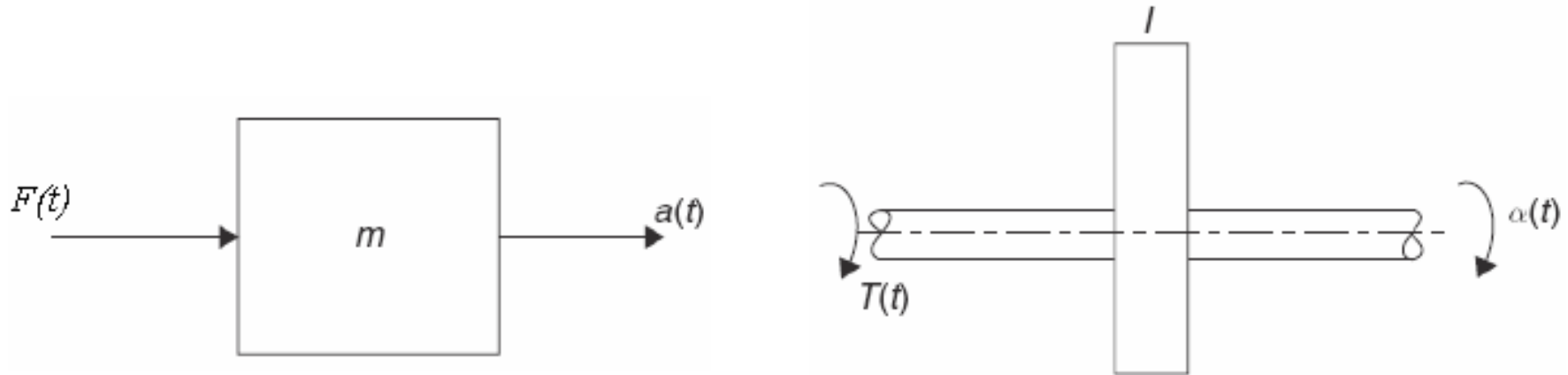
C : sönüm katsayısı Ns/m



$$T(t) = C_r \omega(t) = C_r \frac{d\theta_0}{dt}$$

C_r N ms/rad

Kütle Elemanı : Bir kütleyi harekete geçirmek için gerekli kuvvet, kütle miktarı ile ivmenin çarpımına eşittir (Newton Kanunu).



$$F(t) = ma(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$T(t) = I\alpha(t) = I \frac{d\omega(t)}{dt} = I \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$$

Atalet: Dönme hareketinin kinetik enerjisini depolayan bir elemanın bir özelliği olarak dikkate alınır.

Bu yuvarlak disk veya milin kendi geometrik eksenine göre kütleli atalet momenti,

$$I = \frac{1}{2} Mr^2 \quad (r: \text{yarıçap})$$

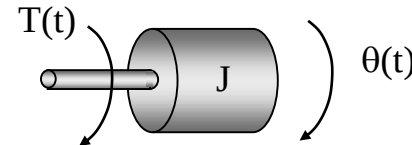
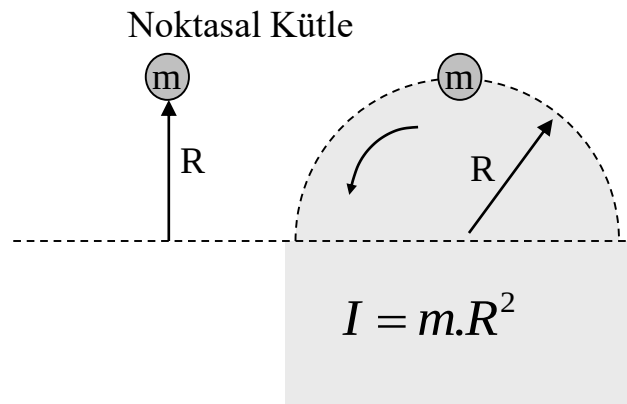
olarak belirlenir.



Dönme Hareketi: Dönen sistemlerde, Newton'un hareket kanununun uygulanması şöyledir: Moment veya Tork'ların cebirsel toplamı, açısal ivme ile kütle atalet momentinin çarpımına eşittir.

$$\sum M = J\alpha$$

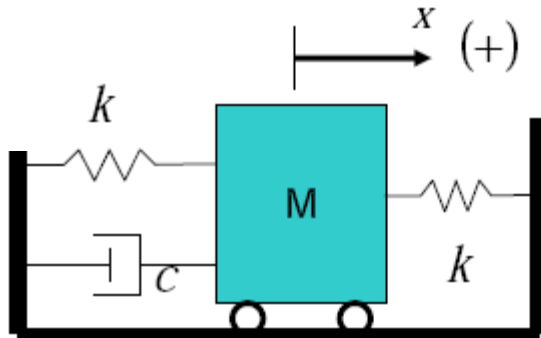
α : Açısal ivme rad./sn²
 J : Kütle atalet momenti (kg.m²)
 M : Moment (N.m)



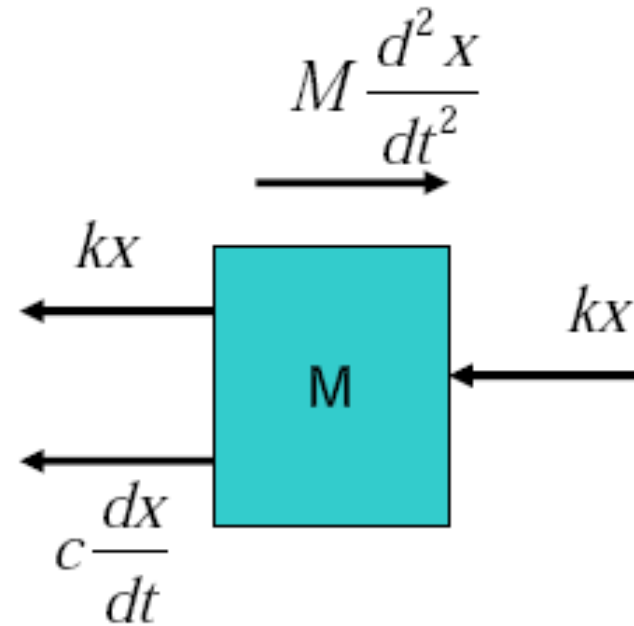
$$T(t) = J\alpha(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

(θ) Açısal Deplasman : 1 rad = 180/ π = 57.3°

(ω) Açısal Hız : 1 rpm = 2 π /60 = 0.1047 rad/sn = 6 deg/sn



Hareket denklemini çıkarınız.

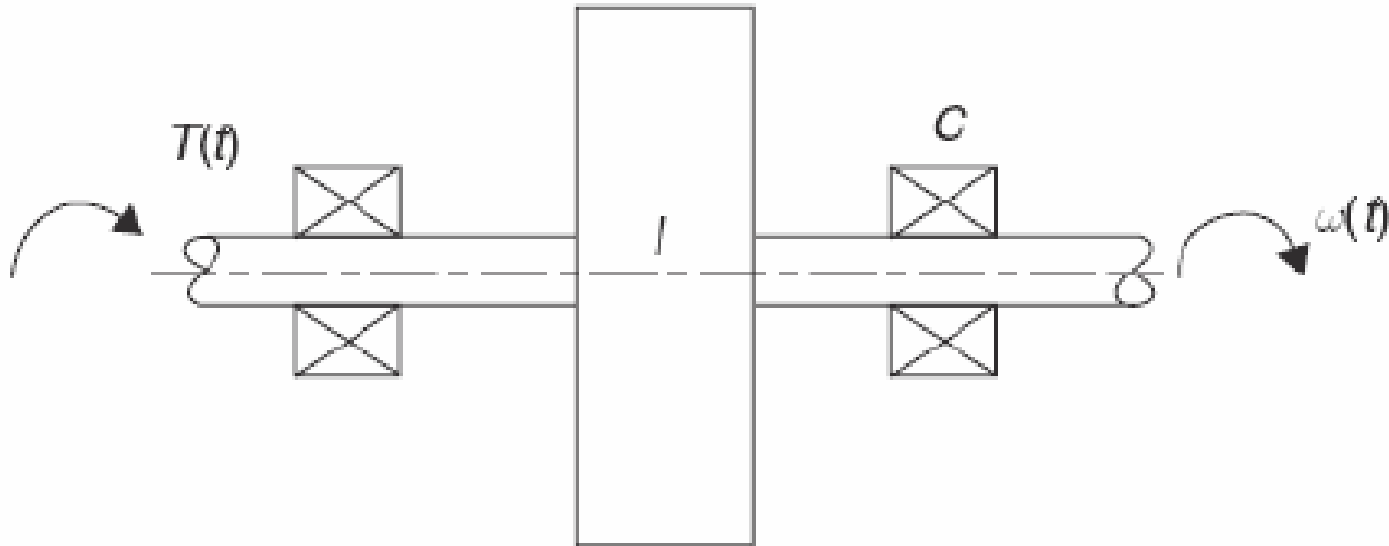


Serbest kütle diagramı

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - kx - c \frac{dx}{dt}$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + 2kx = 0$$

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + k_t x = 0$$



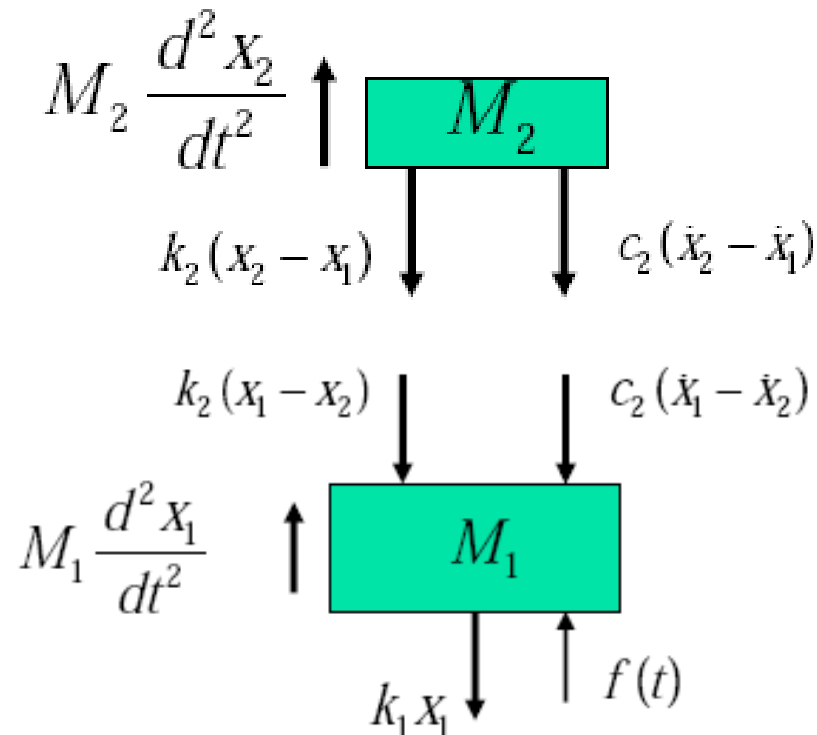
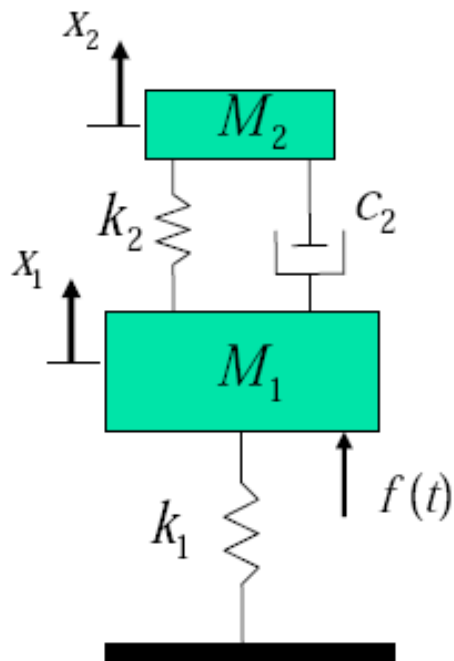
$$\sum M = I\alpha$$

$$T(t) - C\omega = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$I \frac{d\omega}{dt} + C\omega = T(t)$$

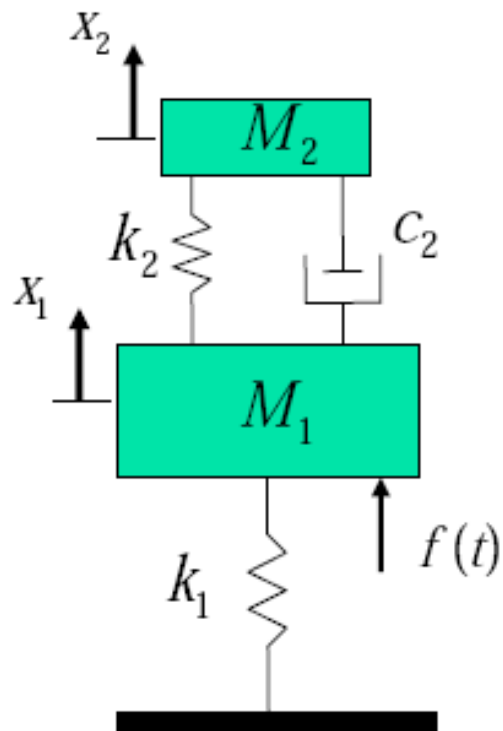


Şekildeki sistemlerin modellenmesi



$$M_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$



$$M_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

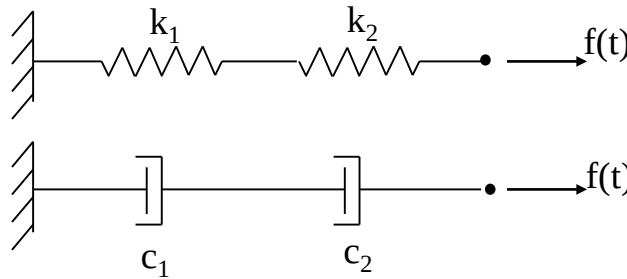
$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$$



Not: Sönüm ve yay elemanı için paralel ve seri bağlama durumundaki eşdeğer yay ve sönüm katsayısı

Seri durumda:



Bu durumda kuvvet sabit, yer değiştirme iki yayın yer değiştirmesinin toplamına eşittir.

$$x = x_1 + x_2$$

Yay kuvveti: $F = k \cdot x$

$$x = \frac{F}{k}$$

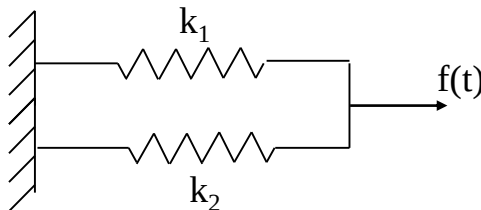
$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

aynı şekilde

$$c = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

Paralel durumda: Deplasman sabit olduğu için,



$$f = f_1 + f_2$$

$$f = k_1 x + k_2 x = kx$$

$$k = k_1 + k_2 \quad \text{ve} \quad c = c_1 + c_2$$

Hareket denklemi:

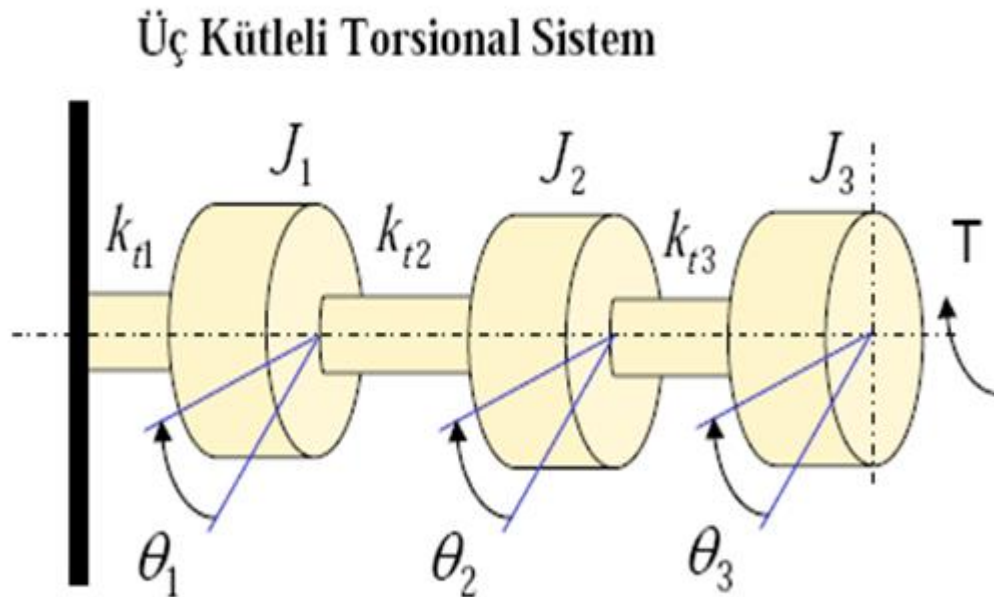
$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -k_{t1} \theta_1 - k_{t2} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -k_{t2} (\theta_2 - \theta_1) - k_{t3} (\theta_2 - \theta_3)$$

$$J_3 \ddot{\theta}_3 = -k_{t3} (\theta_3 - \theta_2) + T$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

$$k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$$



$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_t & -k_t & 0 \\ -k_t & 2k_t & -k_t \\ 0 & -k_t & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}$$