

DİNAMİK SİSTEMLERİN MODELLENMESİ ANALİZİ



Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

- Sistemlerin dinamik davranışları
 - Hareket denklemleri
 - Diferansiyel denklemler
1. Fiziksel yasaların uygulanması
 2. Enerji yöntemi
 3. Grafik yöntemleri

Mekaniksel sistemler	(Newton yasası)
Elektriksel sistemler	(Kirchhoff ve Ohm yasaları)
Akışkan sistemler	(Süreklilik yasası)
Isıl sistemler	(Enerjinin sakınım yasası)

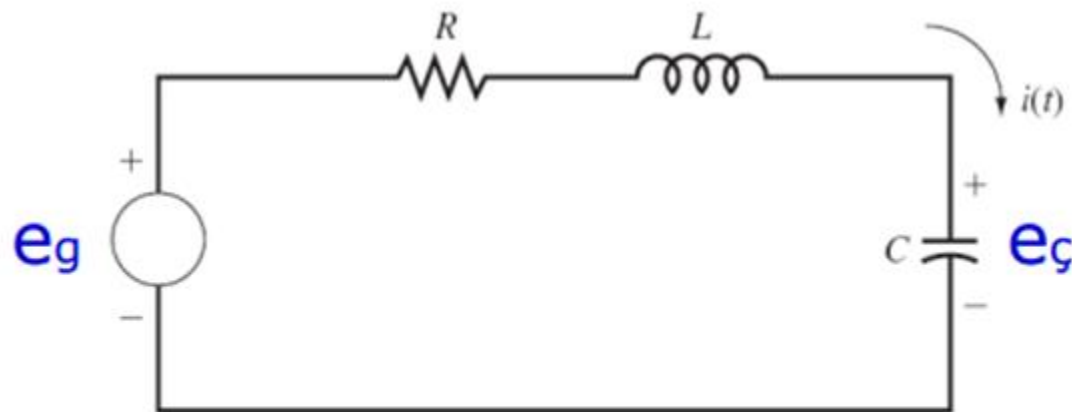


Elektriksel Sistemler

- Elektriksel sistem; direnç, kapasite, indüktans eleman

RLC Devresi

- Hareket denklemleri
- Diferansiyel denklemler



$$e_g = e_L + e_R + e_C$$



Elektriksel Sistemler

$$e_g = e_L + e_R + e_C$$

$$e_g = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i dt$$

$$e_c = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i dt$$

$$E_g(s) = Ls.I(s) + R.I(s) + \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$E_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

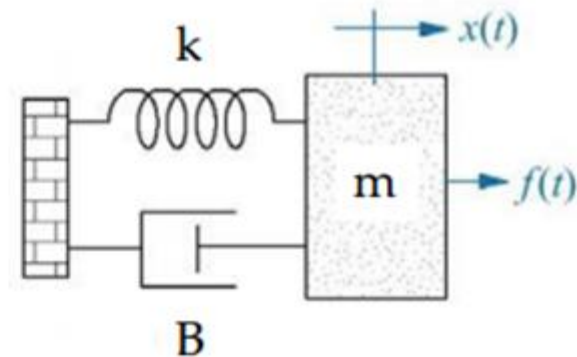
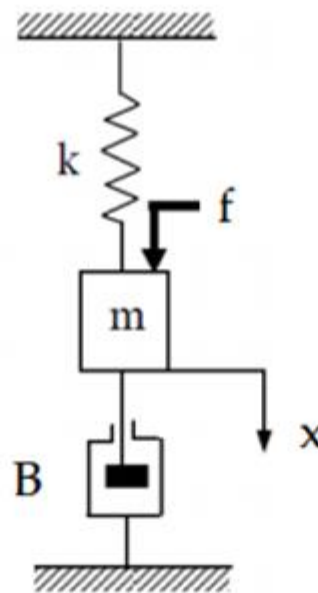
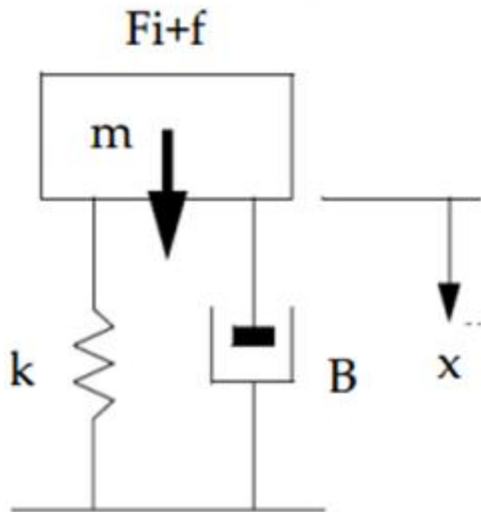
$$\frac{E_c(s)}{E_g(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Mekanik Sistemler

- Mekaniksel sistem; kütle, yay, sönümleme elemanı

Öteleme Yapan Sistemler

- Hareket denklemleri
- Diferansiyel denklemler



$$F + mg - f_k - f_B = m \frac{d^2 X}{dt^2}$$



Mekaniksel Sistemler

$$F(t) = m \frac{d^2 X}{dt^2} + B \frac{dX}{dt} + kX - mg$$



$$f = m \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx$$

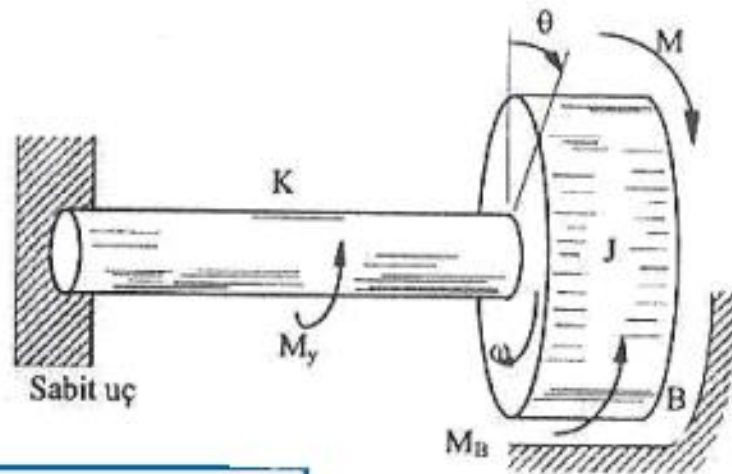


$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k}$$

Mekanik Sistemler

Dönme Yapan Sistemler

- Hareket denklemleri
- Diferansiyel denklemler



$$M = M_J + M_B + M_k$$



$$M(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} + k\theta$$

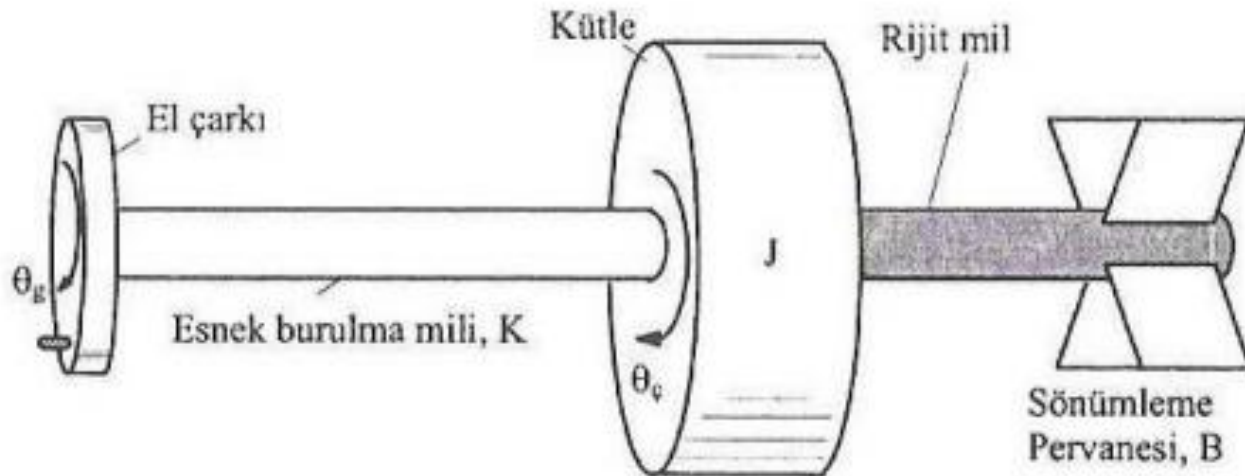


$$\frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + k}$$

Mekanik Sistemler

Açısal Konum veya Hız Kontrolu

➤ Hareket denklemleri



$$M(t) = K(\theta_g - \theta_\zeta)$$



Mekanik Sistemler

$$M(t) = K(\theta_g - \theta_\varsigma) = J \frac{d^2 \theta_\varsigma}{dt^2} + B \frac{d\theta_\varsigma}{dt}$$



$$K\theta_g = J \frac{d^2 \theta_\varsigma}{dt^2} + B \frac{d\theta_\varsigma}{dt} + K\theta_\varsigma$$

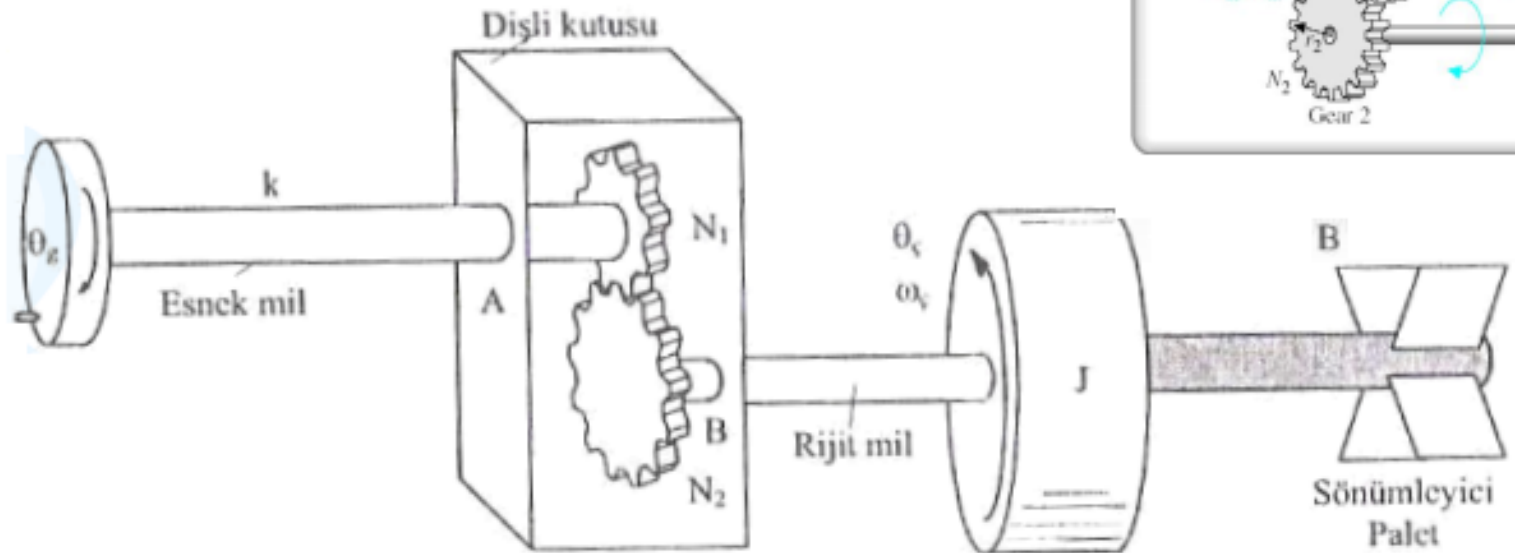


$$\frac{\theta_\varsigma(s)}{\theta_g(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K}$$

Mekanik Sistemler

Dişli Kutusu Olan Dönel Sistemler

➤ Hareket denklemleri



$$n = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\theta_A}{\theta_B}$$

$$M_1(t) = k(\theta_g - \theta_A) = k(\theta_g - n\theta_\chi)$$

$$M_2(t) = nM_1 = kn(\theta_g - n\theta_\chi)$$



Mekaniksel Sistemler

$$M_2(t) = kn(\theta_g - n\theta_\varsigma) = J \frac{d^2\theta_\varsigma}{dt^2} + B \frac{d\theta_\varsigma}{dt}$$



$$kn\theta_g = J \frac{d^2\theta_\varsigma}{dt^2} + B \frac{d\theta_\varsigma}{dt} + kn^2\theta_\varsigma$$

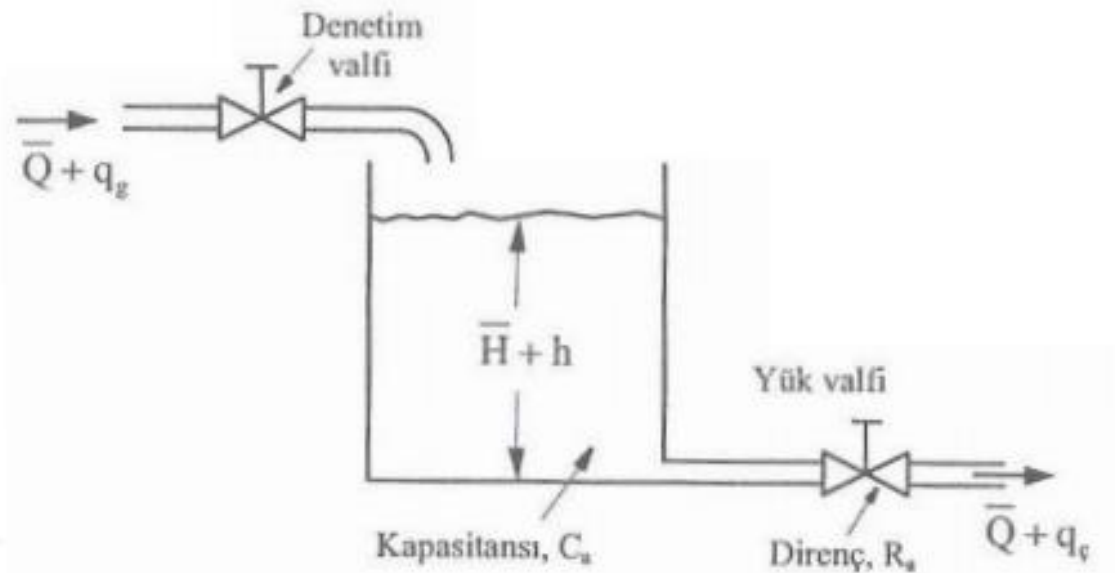


$$\frac{\theta_\varsigma(s)}{\theta_g(s)} = \frac{kn}{Js^2 + Bs + kn^2}$$

AKIŞKAN SİSTEMLER

Sıvı Seviye Kontrol Sistemleri

➤ Hareket denklemleri

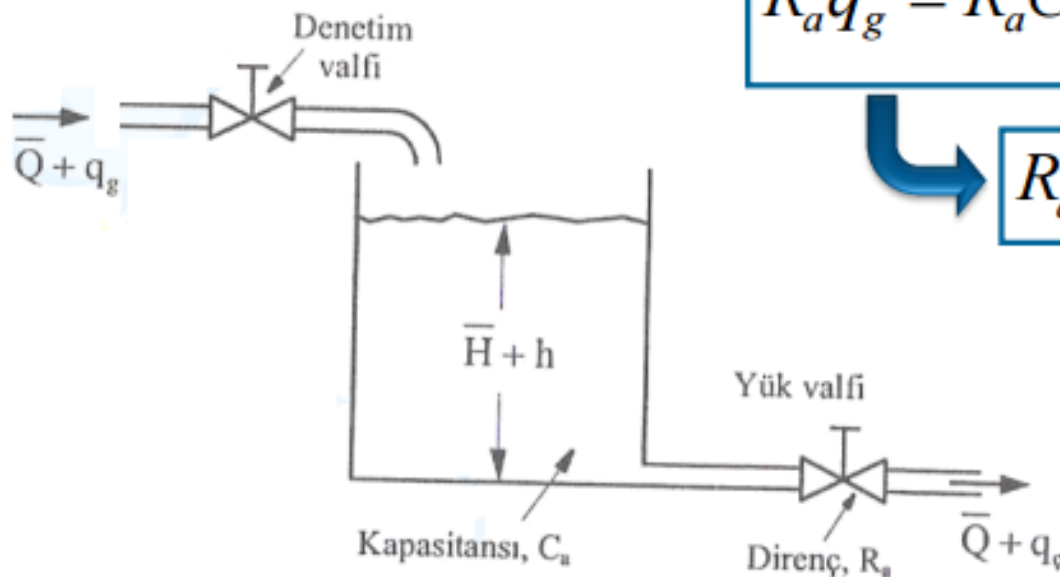


$$q_g - q_ç = C_a \frac{dh}{dt}$$



$$Q_g(s) - Q_ç(s) = C_a s H(s)$$

AKIŞKAN SİSTEMLER



$$q_v = \frac{h}{R_a}$$



$$Q_v(s) = \frac{1}{R_a} H(s)$$

$$R_a q_g = R_a C_a \frac{dh}{dt} + h$$



$$R_a Q_g(s) = (R_a C_a s + 1) H(s)$$

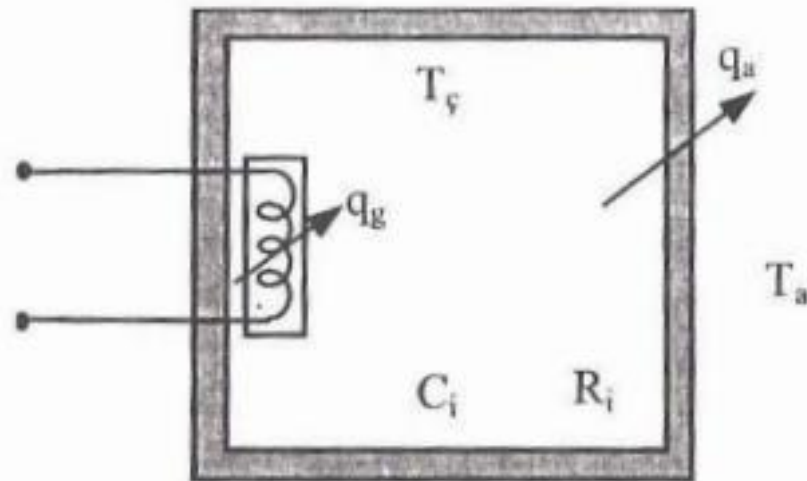


$$\frac{H(s)}{Q_g(s)} = \frac{R_a}{R_a C_a s + 1}$$

ISIL SİSTEMLER

Durgun Ortamda Isıtma

$$q_a = 0$$



$$q_g = C_i \frac{dT_{\check{c}}}{dt}$$



$$T_{\check{c}} = \frac{1}{C_i} \int_0^t q_g dt$$

$$\frac{T_{\check{c}}(s)}{Q_g(s)} = \frac{1}{C_i s}$$

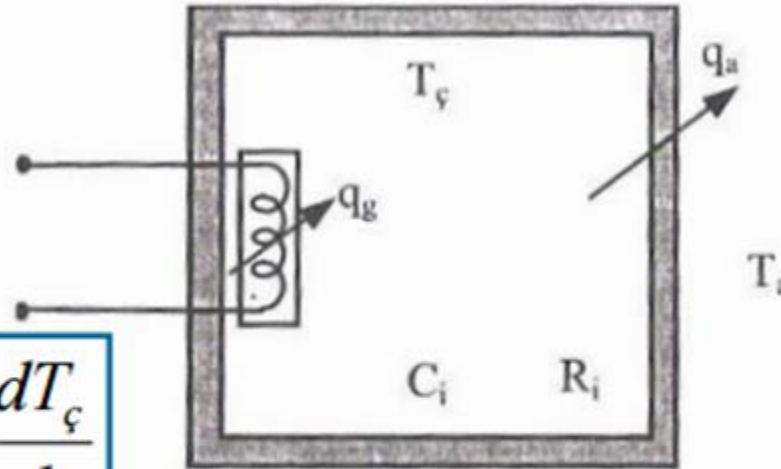


$$\frac{T_{\check{c}}(s)}{Q_g(s)} = \frac{1}{T_i s}$$

ISIL SİSTEMLER

Durgun Ortamda Isıtma

$$q_a \neq 0$$



$$q_g - q_\zeta = C_i \frac{dT_\zeta}{dt}$$

$$q_\zeta = \frac{T_\zeta - T_a}{R_i}$$



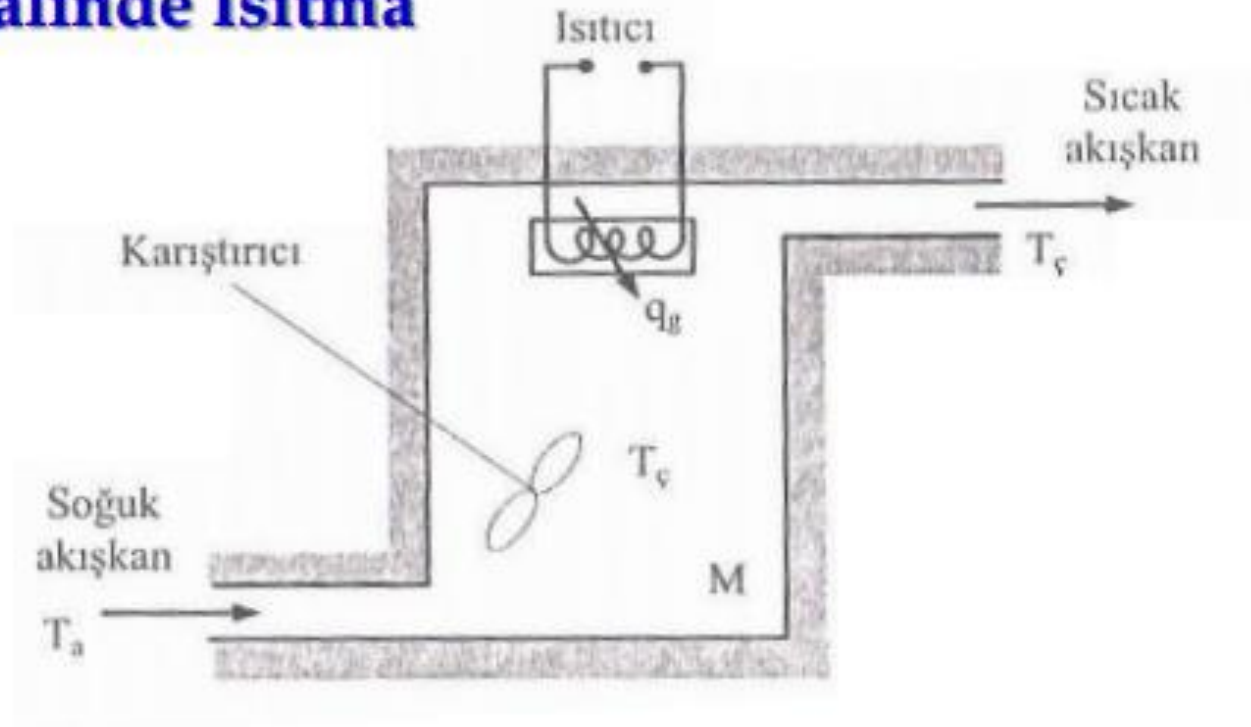
$$R_i q_g - (T_\zeta - T_a) = R_i C_i \frac{dT_\zeta}{dt}$$

$$T_\zeta(s) = \frac{R_i}{T_i s + 1} Q_g(s) + \frac{1}{T_i s + 1} T_a(s)$$

$$T_i = R_i C_i$$

ISIL SİSTEMLER

Akış Halinde Isıtma

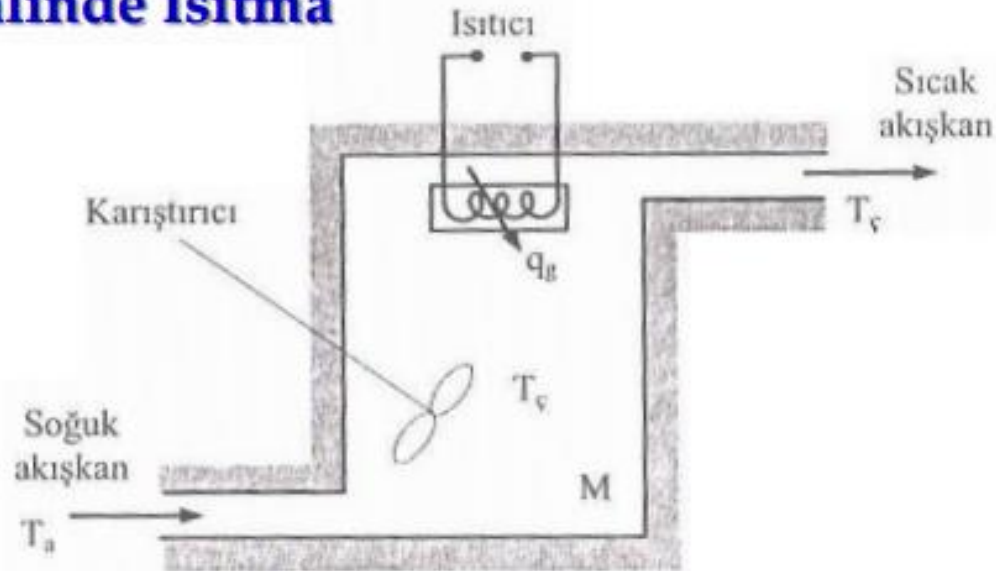


$$q_g - q_a = Mc \frac{dT_{\check{c}}}{dt}$$

$$q_a = \dot{m}c(T_{\check{c}} - T_a)$$

ISIL SİSTEMLER

Akış Halinde Isıtma



$$q_{ısıtıcı} - \dot{m}c(T_{\check{c}} - T_a) = Mc \frac{dT_{\check{c}}}{dt}$$



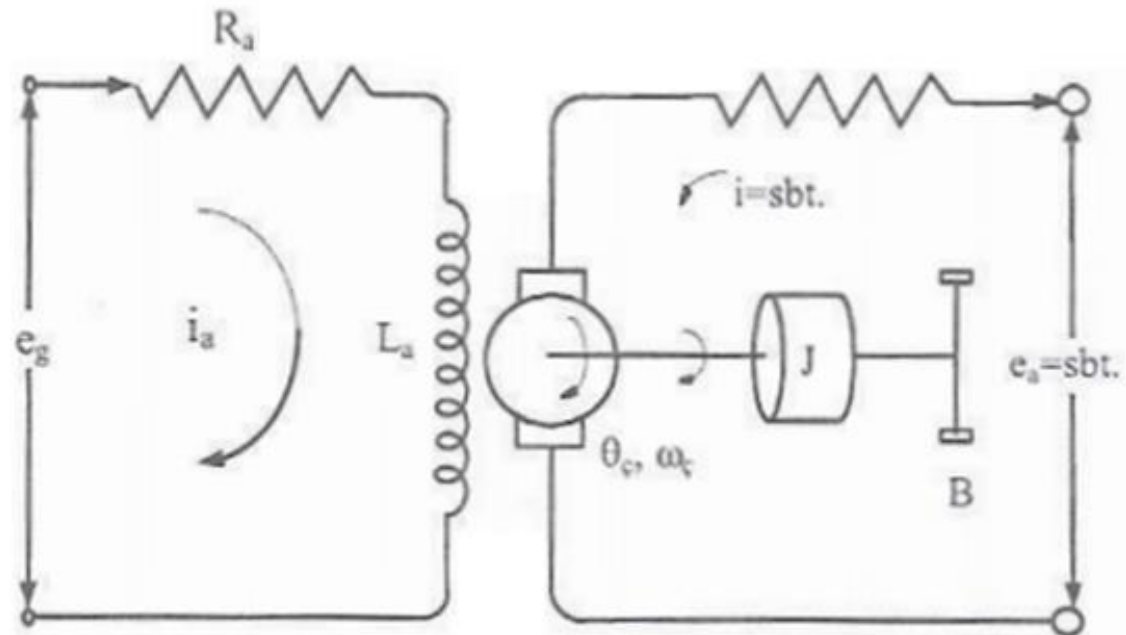
$$\frac{q_{ısıtıcı}}{\dot{m}c} + T_a = \frac{M}{\dot{m}} \frac{dT_{\check{c}}}{dt} + T_{\check{c}}$$

$$T_{\check{c}}(s) = \frac{1/\dot{m}c}{T_i s + 1} Q_{ısıtıcı}(s) + \frac{1}{T_i s + 1} T_a(s)$$

$$T_i = \frac{M}{\dot{m}}$$

Elektromekanik Sistemler

Dönel Elektromekanik Eyleyiciler *Alan Sargısı Kontrollü DA Motor*



$$M(t) = K_m i_a$$

$$e_g = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a$$



$$E_g(s) = [L_a(s) + R_a] I_a(s)$$

Elektromekanik Sistemler

Dönel Elektromekanik Eyleyiciler Alan Sargısı Kontrollü DA Motor

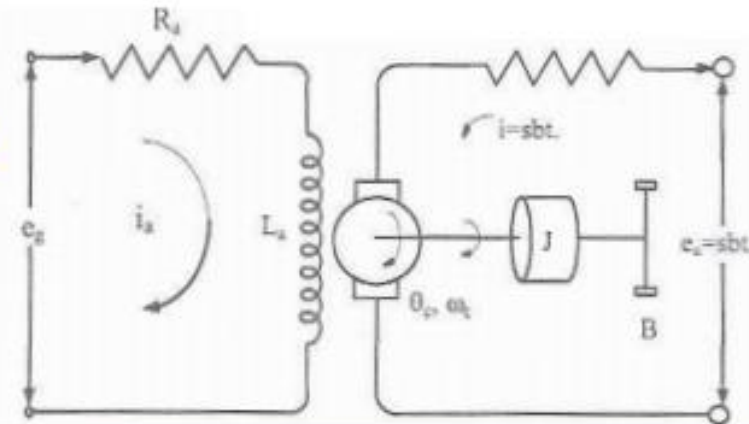
$$M(t) = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt}$$

$$M(s) = (Js^2 + Bs)\theta(s)$$

$$\theta(s) = \frac{M(s)}{(Js^2 + Bs)}$$

$$\theta(s) = \frac{K_m I_a(s)}{(Js^2 + Bs)}$$

$$I_a(s) = \frac{E_g(s)}{[L_a s + R_a]}$$



$$M(s) = K_m I_a(s)$$

$$E_g(s) = [L_a s + R_a] I_a(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{E_g(s)} = \frac{K_m}{s(L_a s + R_a)(Js + B)}$$

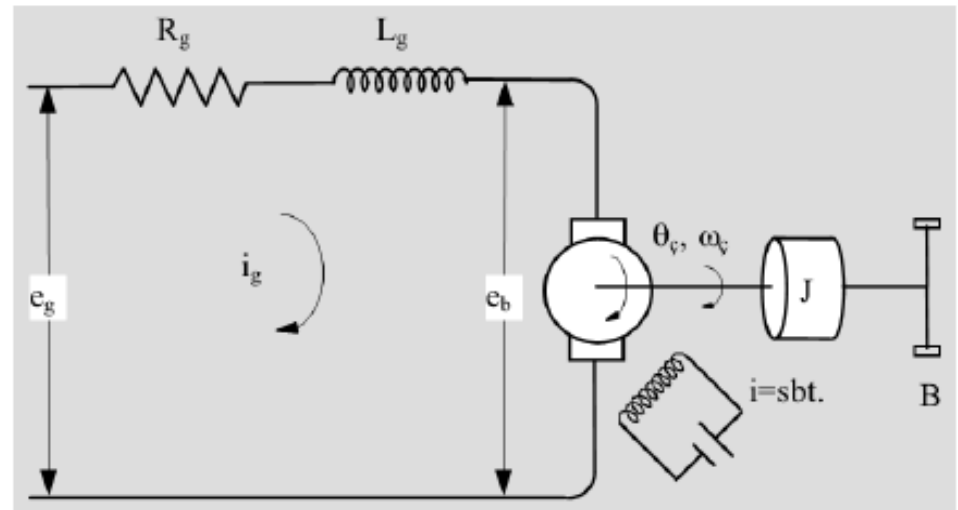
Örnek : Yandaki doğru akım motorunun girişi $e_g(t)$ gerilim kaynağı, çıkışı $\theta_f(t)$ motorun milinin açısal konumudur.

a) Sistemin dinamik denklemlerini yazarak blok diyagramını oluşturunuz.

b) Sistemin blok diyagramını indirgeyerek

$\frac{\theta_f(s)}{E_g(s)}$ transfer fonksiyonunu bulunuz.

c) Sistemin blok diyagramını indirgeyerek toplam cevap fonksiyonunu bulunuz.



Göbek sargısı denetimli DA motoru

Çözüm: a) Sisteme ait dinamik denklemleri

Kirchhoff yasasından :
$$e_g(t) = R_g i_g(t) + L_g \frac{di_g(t)}{dt} + e_b(t)$$

Newton yasasından :
$$M(t) - T_L(t) = J \frac{d^2 \theta_f(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta_f(t)}{dt}$$

olarak yazabiliriz.

Burada

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta_f(t)}{dt} : \text{Zıt elektro-motor-kuvvet gerilimi,}$$

$$M(t) = K_m i_g(t) : \text{Motorun ürettiği döndürme momenti,}$$

$$T_L(t) : \text{Bozucu yük torkudur.}$$



Bu denklemlerin Laplace dönüşümleri alındığında aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$E_g(s) - E_b(s) = R_g I_g(s) + L_g s I_g(s) \rightarrow E_g(s) - E_b(s) = (R_g + L_g s) I_g(s) \quad \dots\dots (1)$$

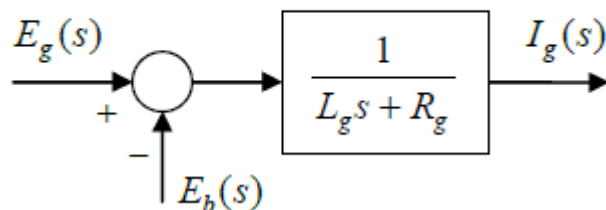
$$M(s) - T_L(s) = J s^2 \theta_\varphi(s) + B s \theta_\varphi(s) \rightarrow M(s) - T_L(s) = s(J s + B) \theta_\varphi(s) \quad \dots\dots (2)$$

$$E_b(s) = K_b s \theta_\varphi(s) \quad \dots\dots (3)$$

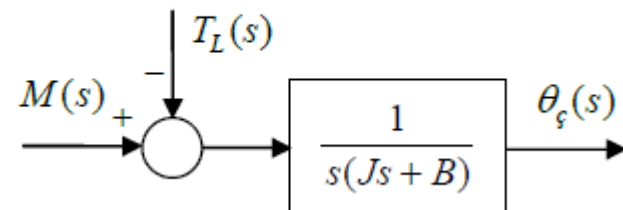
$$M(s) = K_m I_g(s) \quad \dots\dots (4)$$

Elde edilen s-domenindeki denklemlerden blok diyagramın parçaları aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

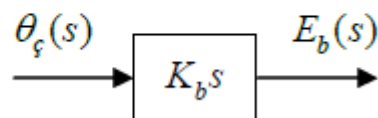
(1) numaralı denklemden:



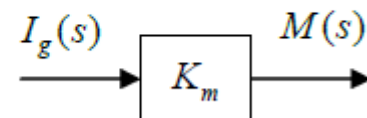
(2) numaralı denklemden:



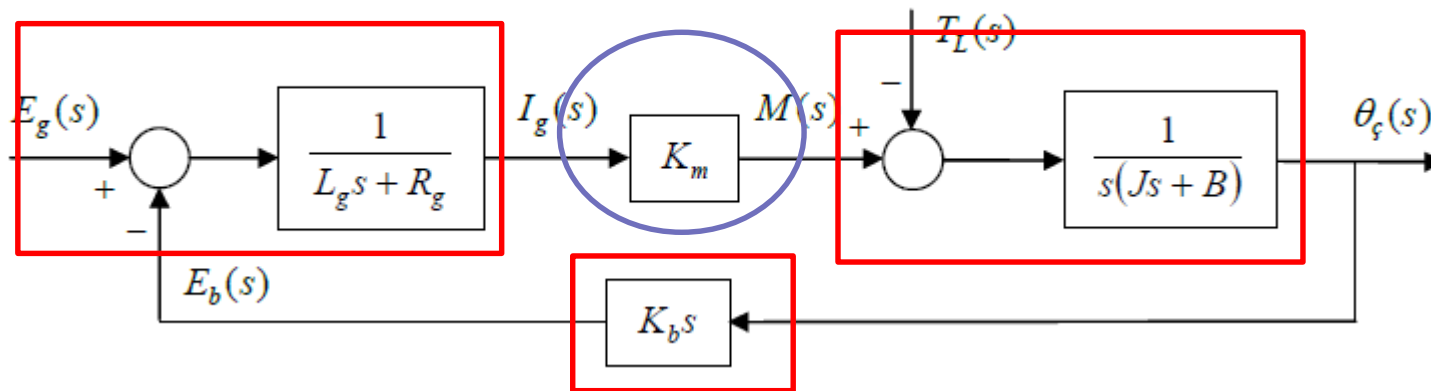
(3) numaralı denklemden:



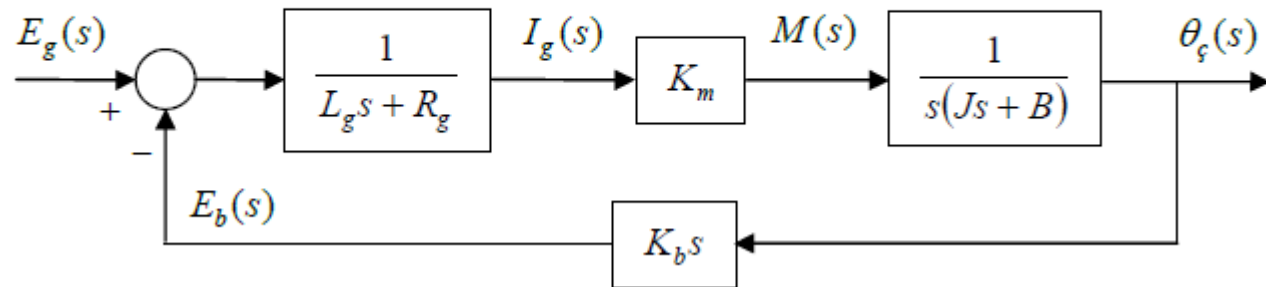
(4) numaralı denklemden:



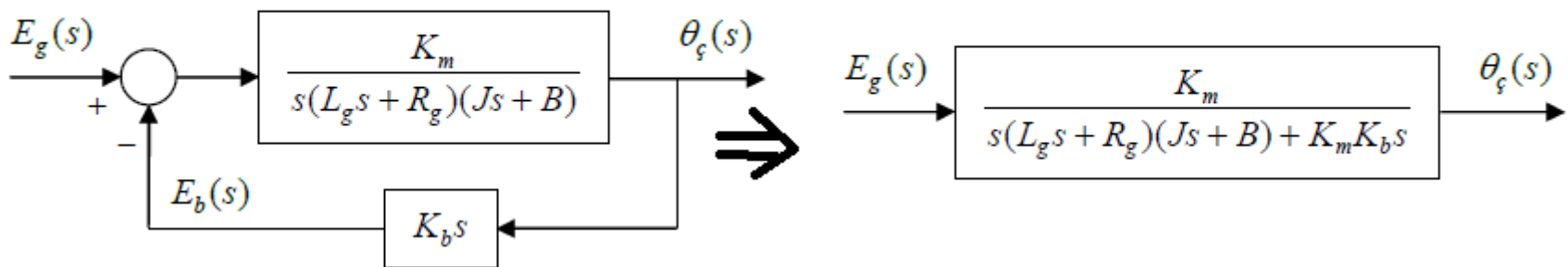
Dinamik denklemlerden elde edilen blok diyagramlar birleştirildiğinde sistemin blok diyagramı aşağıdaki gibi elde edilir.



b) $T_L(s) = 0$ için aşağıdaki blok şema elde edilir.

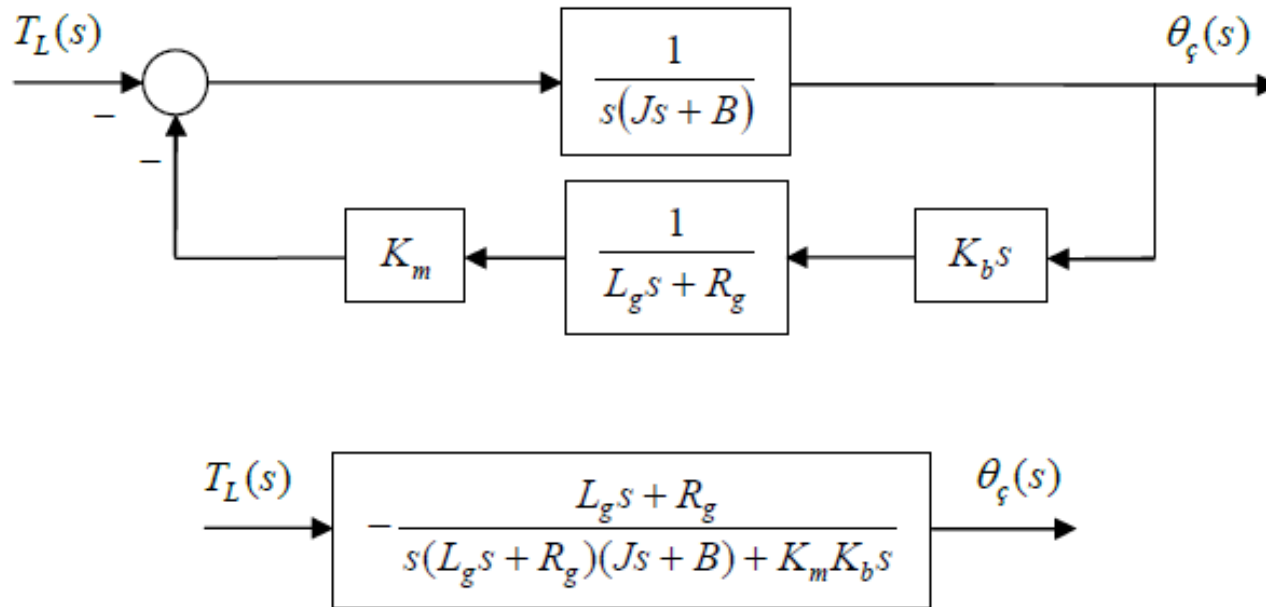


indirgeme yapıldığında aşağıdaki blok şema elde edilir.





c) $E_g(s) = 0$ için aşağıdaki blok şema elde edilir.



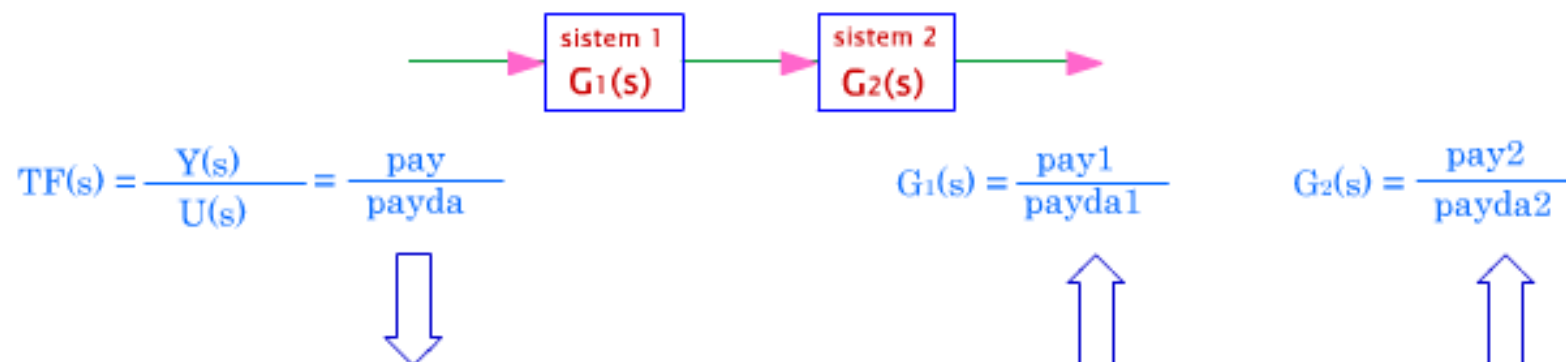
Sistemin toplam cevap fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\theta_f(s) = \frac{\theta_f(s)}{E_g(s)} E_g(s) + \frac{\theta_f(s)}{T_L(s)} T_L(s)$$

$$\theta_f(s) = \frac{K_m}{s(L_g s + R_g)(Js + B) + K_m K_b s} E_g(s) - \frac{L_g s + R_g}{s(L_g s + R_g)(Js + B) + K_m K_b s} T_L(s)$$

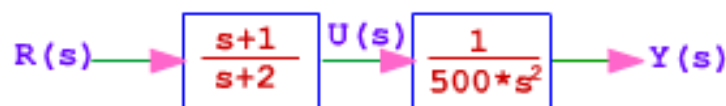


series...



Matlab'da kullanımı : `[pay,payda]=series( pay1,payda1,pay2,payda2)`

örnek uygulama :



Açık Döngü Kontrol Sistemi

```

***matlab programı***
payg=[1];paydag=[500 0 0];
paygc=[1 1];paydagc=[1 2];
[pay,payda]=series(payg,paydag,paygc,paydagc);
printsys(pay,payda)

***ekran çıktısı***

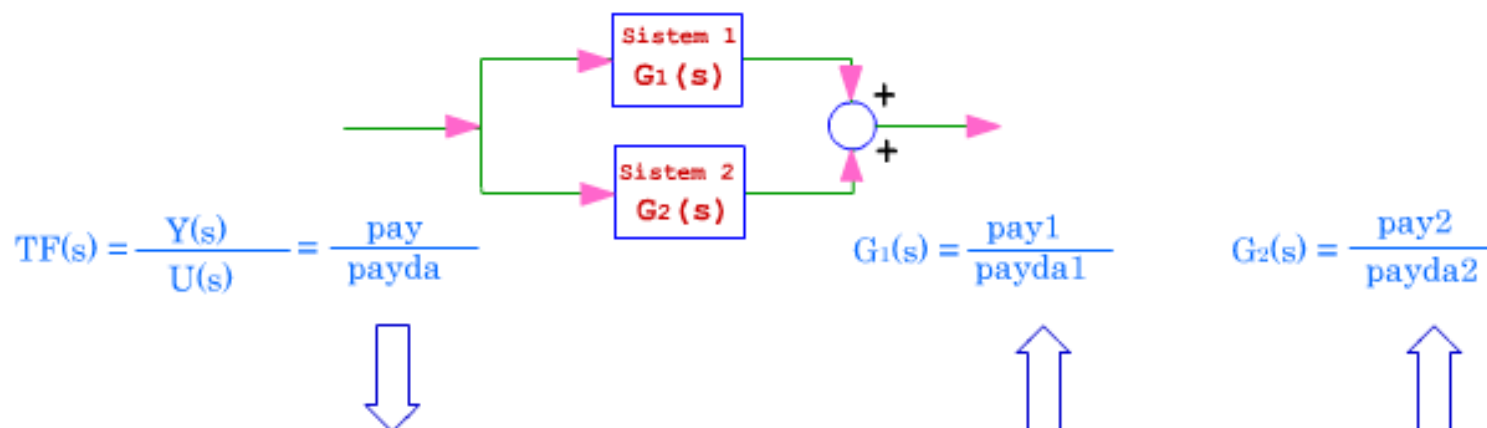
```

num/den =

$$\frac{s + 1}{500 s^3 + 1000 s^2}$$

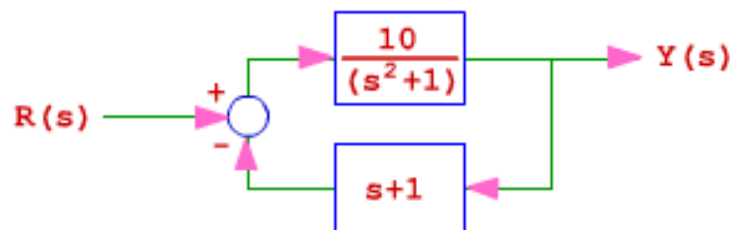


parallel...



Matlab'da kullanımı : `[pay,payda]=parallel( pay1,payda1,pay2,payda2)`

örnek uygulama :



*****matlab programı*****

```
pay1=[10];payda1=[1 1 0];
pay2=[1 1];payda2=[0 1];
[pay,payda]= parallel(pay1,payda1,pay2,payda2);
printsys (pay,payda)
```

*****ekran çıktısı*****

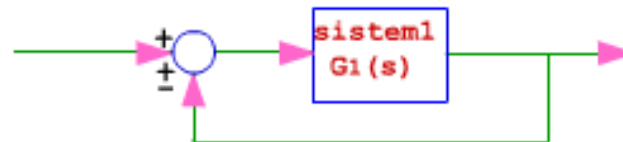
num/den =

$s^3 + 2 s^2 + s + 10$

 $s^2 + s$



cloop...



$$TF(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{pay}}{\text{payda}}$$

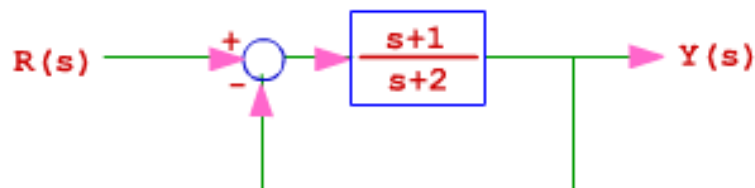
$$G_1(s) = \frac{\text{pay1}}{\text{payda1}}$$

+1 pozitif geribesleme
-1 negatif geribesleme



Matlab'da kullanımı `[pay,payda]=cloop( pay1,payda1,işaret)`

örnek uygulama :



matlab programı

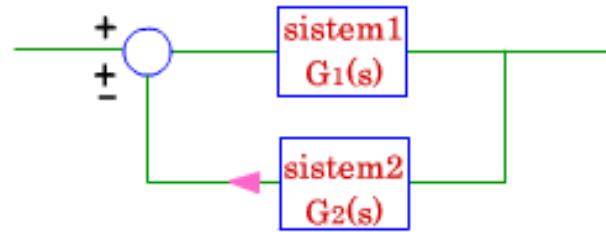
```
pay1=[1 1];payda1=[1 2];
[pay,payda]=cloop(pay1,payda1,-1);
printsys(pay,payda)
```

ekran çıktısı

```
num/den =
      s + 1
-----
        3
```



feedback...



$$TF(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{pay}}{\text{payda}}$$



Matlab'da kullanımı: `[pay,payda]=feedback( pay1,payda1,pay2,payda2,işaret)`

$$G_1(s) = \frac{\text{pay1}}{\text{payda1}}$$



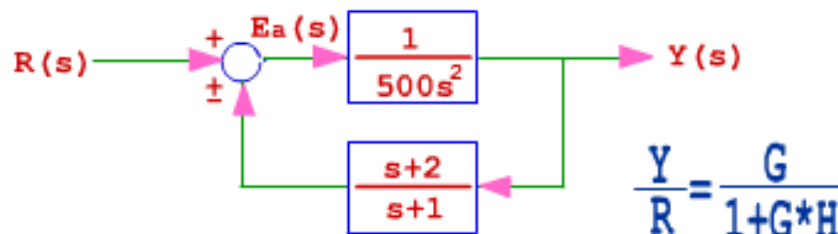
$$G_2(s) = \frac{\text{pay2}}{\text{payda2}}$$



+1 pozitif geribesleme
-1 negatif geribesleme



örnek uygulama :



Kapalı Döngü Kontrol Sistemi

$$\frac{Y}{R} = \frac{G}{1+G*H}$$

matlab programı

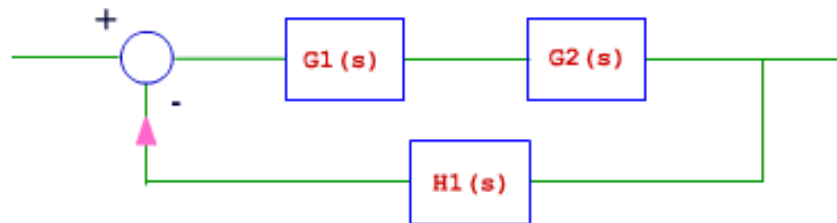
```
pay1=[1];payda1=[500 0 0];
pay2=[1 2];payda2=[1 1];
[pay,payda]=feedback(pay1,payda1,pay2,payda2,-1);
printsys(pay,payda)
```

ekran çıktısı

```
num/den =
      s + 1
-----
500 s^3 + 500 s^2 +  s + 2
```



conversion...



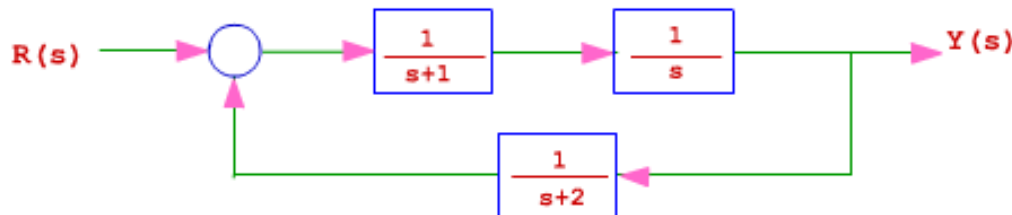
$$TF(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{pay}}{\text{payda}}$$

$$G_1(s) = \frac{\text{pay1}}{\text{payda1}} \quad G_2(s) = \frac{\text{pay2}}{\text{payda2}}$$

Matlab'da kullanımı:

[pay]=conv (pay1 ,pay2)
[payda]=conv (payda1 ,payda2)

örnek uygulama :



Kapalı Döngü Kontrol Sistemi

matlab programı

```
payg1=[1];paydag1[1 1];
payg2=[1];paydag2=[1 0];
payh1=[1],paydah2=[1 2];
[payc1]=conv (payg1,payg2);
[paydac1]=conv (paydag1,paydag2);
[pay,payda]=feedback (payc1,paydac1,payh1,paydah1,-1);
printsys (pay payda)
```

ekran çıktısı

num/den=

$$\frac{1}{s^2+s}$$