



7.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı

Bir $f(t)$ fonksiyonunun integral dönüşümü

$$\mathcal{T}[f(t)] = F(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$

biçiminde bir integralle tanımlanır. Verilmiş $k(s, t)$ fonksiyonuna integral dönüşümün çekirdeği denir. $F(s)$ fonksiyonu verildiğinde $f(t)$ ye ters integral dönüşüm denir ve $\mathcal{T}^{-1}[F(s)]$ ile gösterilir. Laplace dönüşümü integral dönüşümlerin ilk örneklerinden birisidir. Çekirdek ve sınırlar

$$k(s, t) = e^{-st}, \quad a = 0, \quad b = \infty$$

olarak tanımlanır. Diğer önemli bir integral dönüşüm de

$$k(s, t) = e^{-ist}, \quad a = -\infty, \quad b = \infty$$

ile verilir. Bu tür dönüşüme Fourier dönüşümü denir ve diferansiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutar. Ancak biz burada yalnızca Laplace dönüşümlerini inceleyeceğiz.

$f, t > 0$ zaman değişkeninin tek-değerli bir fonksiyonu ve s bir (reel veya kompleks olabilir) parametre olsun. $f(t)$ nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (7.1)$$



integrali ile tanımlanır. Buradaki integral Riemann anlamında öz-olmayan bir integraldir ve

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-st} f(t) dt$$

limiti anlaşılacaktır. Eğer integral yakınsak ise yani yukarıdaki limit sonlu bir sayı ise Laplace dönüşümü tanımlıdır, eğer değilse dönüşüm tanımlı olmaz. $F(s)$ fonksiyonuna bazen görüntü fonksiyon da denir.

Tanım 7.1 Bir $T \geq 0$ için

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \text{veya} \quad |e^{-\alpha t} f(t)| \leq M, \quad t \geq T$$

olacak biçimde $M > 0$ ve α sabitleri varsa $f(t)$ fonksiyonuna α üstel mertebededir denir ve

$$f(t) = O(e^{\alpha t})$$

yazılır.

Polinomlar, üstel fonksiyonlar, $\sin t$ ve $\cos t$ trigonometrik fonksiyonlar üstel mertebeden olduğu halde $f(t) = e^{t^2}$ fonksiyonu üstel mertebeden değildir. Çünkü, α ne kadar büyük seçilirse seçilsin

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2} e^{-\alpha t}$$

limiti süratle sonsuza gidecektir.



Tanım 7.2 Eğer bir $f(t)$ fonksiyonunun

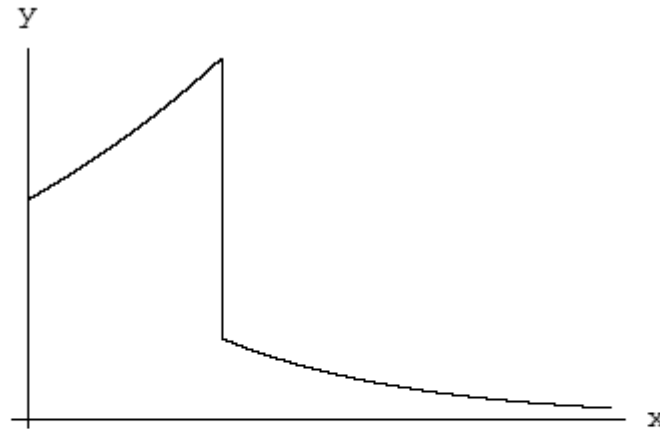
$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0^+) \quad \text{ve} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0^-)$$

sağdan ve soldan limitleri varsa fakat

$$f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$$

ise f nin t_0 noktasında bir sıçrama süreksizliği vardır denir.

Tanım 7.3 Eğer $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ limiti varsa ve f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıçrama süreksizliği dışında her sonlu $(0, T)$ aralığında sürekli ise fonksiyona $[0, \infty)$ aralığında parça parça sürekli fonksiyondur denir.



Şekil 7.1: Sıçrama Süreksizliği

Parça parça sürekli bir fonksiyonu bir aralık üzerinde integre etmek için sürekli olduğu altaralıklarda integre edip toplamak yeterli olacaktır. Parça parça sürekli bir fonksiyon integre edilebilir. Analizden bilinen bu sonucu kullanarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.



Laplace Dönüşümü İçin Varlık Teoremi:

Teorem 7.4 Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parça parça sürekli ve α üstel mertebeden ise, $\alpha > s$ için Laplace dönüşümü vardır ve mutlak yakınsar.

Kanıt: f fonksiyonu parça parça sürekli olduğundan $[0, M)$ sonlu aralığı üzerinde sınırlı olur ve

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

yazarak Laplace dönüşümünün yakınsaklığını yukarıdaki ikinci integralin yakınsaklığına indirgemiş oluruz. Varsayımdan f üstel merdebeden olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_{t_0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left. \frac{-M}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \right|_{t_0}^{\tau} \end{aligned}$$

yazılabilir ve integral ancak $s > \alpha$ için yakınsak olur. ■

Varlık teoremi bir yeter koşuldur. Yani teoremin varsayımları gerçekleştiğinde teorem Laplace dönüşümünün varlığını garantiler. Ancak tersi doğru değildir. Yani gerek koşul değildir. Varsayımların gerçekleşmemesi durumunda Laplace dönüşümü var olabilir veya olmayabilir.



Örnek 7.1 $t > 0$ ve negatif olmayan tamsayı n için $\mathcal{L}\{t^n\}$ dönüşümünün var olduğunu gösterin?

Herhangibir $\alpha > 0$ için

$$e^{\alpha t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^r t^r}{r!} \geq \frac{t^n}{n!}$$

eşitsizliği

$$t^n \leq n! e^{\alpha t}$$

olarak yazılabildiğinden t^n üstel mertebeden bir fonksiyondur, o halde Laplace dönüşümü vardır.

Örnek 7.2 $\mathcal{L}\{t^n \cos at\}$ ve $\mathcal{L}\{t^n \sin at\}$ dönüşümlerinin var olduğunu gösterin?

$|\sin at| \leq 1$ ve $|\cos at| \leq 1$ olduğundan verilen fonksiyonlar üstel mertebeden olur. Varlık teoreminden dönüşümlerin tanımlı olduğu çıkar.



7.2 Laplace Dönüşümünün Özellikleri

1.) Lineerlik Özeliği

Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) + G(s) \quad (7.2)$$

bağıntısı geçerlidir. Yani, Laplace dönüşümü lineer bir operatördür. Bu sonuç Laplace dönüşümü tanımından hemen çıkar.

2.) Birinci Öteleme Özeliği

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$ dir.

Gerçekten, tanımdan

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a). \quad (7.3)$$

Bu kurala görüntü fonksiyonun ötelenmesi kuralı denir.



3.) İkinci Öteleme Özeliği

$t = a$ noktasında sıçrama süreksizliği olan birim basamak fonksiyonu

$$u(t - a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

ile tanımlanır. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$, $a \geq 0$ dir. Yine tanımdan

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t - a)u(t - a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t - a) dt$$

yazılır ve son integralde $\tau = t - a$ dönüşümü yapılırsa

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (7.4)$$

çıkar. Ne yazık ki $f(t + a)u(t + a)$, $a \geq 0$ için benzer simetrik bir bağıntı yoktur.

4.) Ölçek Değişim Özeliği (Benzerlik Teoremi)

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.5)$$

yazılabilir.

Tanımdan

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt$$

yazıp integralde $\tau = at$ dönüşümü yaparsak ölçek özeliğini hemen elde ederiz.



5.) Görüntü Fonksiyonun Türetilmesi

Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$$

dir.

Bu kuralı görmek için $F(s)$ fonksiyonunu s e göre türetmek ve Laplace dönüşümünün tanımını göz önüne almak yeterlidir:

$$\frac{dF(s)}{ds} = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

Türetme işlemini n kez yineleyerek görüntü fonksiyonun n . türevi ile işaret farkıyla $t^n f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü arasındaki şu ilişkiyi elde ederiz:

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}. \quad (7.6)$$



6.) Görüntü Fonksiyonun İntegre Edilmesi

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise bu kez $F(s)$ fonksiyonunun integrali için ilginç bir kural çıkaracağız. Bu kural şöyle ifade edilir:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du. \quad (7.7)$$

Bunu görmek için $F(u)$ integrandı yerine tanımı yazılır:

$$\int_s^\infty F(u) du = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right) du.$$

Bu bağıntının sağındaki integrasyonun sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(u) du &= \int_0^\infty f(t) \left(\int_s^\infty e^{-ut} du \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(-\frac{1}{t} [e^{-ut}]_{u=s}^\infty \right) dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

elde ederiz.



7.) Laplace dönüşümünün limit biçimi

Eğer $F(s)$ bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ise

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

dır. Gerçekten, $f(t)$ üstel mertebeden ise

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{M}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$$

yazılabilir. O halde

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |F(s)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

dir.



7.3 Bazı Elemanter Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

Örnek 7.3 $f(t) = e^t$ olsun. $\mathcal{L}\{e^t\}$ yi hesaplayalım.

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^t dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-1)t} dt$$

yazılırsa sağdaki integralin değeri $s > 1$ için yakınsar ve limit işlemi ile

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{(s-1)} [e^{-(s-1)t}]_0^M = \frac{1}{s-1}$$

bulunur. O halde

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}, \quad s > 1$$

dir.

Ölçek kuralını kullanarak

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{a} \frac{1}{s-1} \Big|_{s \rightarrow s/a} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a \quad (7.8)$$

formülünü buluruz.



Örnek 7.4 $\mathcal{L}\{t^\alpha\}$ Laplace dönüşümünü hesaplayın.

Genel olarak reel bir α için

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^\alpha dt = \Gamma(\alpha + 1)$$

integralinde $st = \tau$ dönüşümü yapılırsa integral Γ fonksiyonu ile ifade edilebilir:

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad s > 0.$$

Özel olarak $\alpha = n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ise $\Gamma(\alpha) = \Gamma(n) = (n - 1)!$ dir ve

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$



yazabiliriz. Örneğin,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}.$$

Öteleme teoreminden

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

dir. $\alpha = -1/2$ için $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ değeri kullanılırsa

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

çıkar. $f(t) = t^{-1/2}$ fonksiyonu için 7.4 teoreminin koşulları sağlanmadığı halde, Laplace dönüşümünün var olduğuna dikkat ediniz.

Genel olarak $n = 1, 2, \dots$ için

$$\mathcal{L}\{t^{n-\frac{1}{2}}\} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{s^{(n+\frac{1}{2})}} = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} s^{-n-\frac{1}{2}}, \quad s > 0 \quad (7.9)$$

dönüşümü geçerlidir.



Örnek 7.5 $\mathcal{L}\{\sinh at\}$ Laplace dönüşümünü hesaplayın.

Linerlik özeliği ve (7.8) formülü ile

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{-at}\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|$$

çıkar. Benzer olarak

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|$$

dir.

Şimdi trigonometrik fonksiyonların Laplace dönüşümlerini hesaplayalım.

Örnek 7.6

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = ? \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = ?$$

$F(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}$ ve $G(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}$ olsun. Tanımdan kısmi integrasyon ile

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos t \, dt = [e^{-st} \sin t]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t \, dt = sG(s)$$



ve

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t \, dt = [-e^{-st} \cos t]_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} e^{-st} \cos t \, dt = 1 - sF(s)$$

bulunur. Bu iki eşitlik $F(s)$ ve $G(s)$ için çözülürse hemen

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

bulunur. Son olarak ölçek kuralı ile

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

çıkar. Ayrıca, birinci öteleme kuralı ile

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$$

dönüşüm formüllerini buluruz.



Örnek 7.7 $\mathcal{L}\{t \sin at\} = ?$

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\sin at\} = -\frac{d}{ds}\frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{2as}{s^2 + a^2}.$$

Genel olarak,

$$\mathcal{L}\{t^n \sin at\}, \quad \mathcal{L}\{t^n \cos at\}$$

dönüşümlerini hesaplamak için

$$h(t) = t^n e^{iat} \quad (7.10)$$

fonksiyonunu düşünelim.

$$\begin{aligned} H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s - ia} = \frac{n!}{(s - ia)^{n+1}} \\ &= n!(s^2 + a^2)^{-(n+1)}(s + ia)^{n+1} \end{aligned}$$

dönüşümünde

$$s + ia = Re^{i\phi}, \quad R = \sqrt{s^2 + a^2}, \quad \tan \phi = \frac{a}{s}$$



kutupsal gösterimini kullanır ve $H(s)$ nin reel ve sanal parçalarını ayırırsak

$$\mathcal{L}\{t^n \cos at\} = n! R^{n+1} \frac{\cos(n+1)\phi}{(s^2 + a^2)^{n+1}},$$

$$\mathcal{L}\{t^n \sin at\} = n! R^{n+1} \frac{\sin(n+1)\phi}{(s^2 + a^2)^{n+1}}$$

dönüşüm formüllerini çıkarmış oluruz. Örneğin $n = 1$ için

$$\cos 2\phi = \frac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}, \quad \sin 2\phi = \frac{2as}{s^2 + a^2}$$

bağıntıları yardımıyla

$$\mathcal{L}\{t \cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{s^2 + a^2}$$

buluruz. $n = 2$ için

$$\mathcal{L}\{t^2 \cos at\} = \frac{2s(s^2 - 3a^2)}{(s^2 + a^2)^3}, \quad \mathcal{L}\{t^2 \sin at\} = \frac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}.$$



Örnek 7.8 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = ?$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{a \, du}{u^2 + a^2} = \arctan \frac{u}{a} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{a} = \arctan \frac{a}{s}.$$

Bu dönüşümde $s \rightarrow 0^+$ limitine geçerek yan ürün olarak

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\sin at}{t} \, dt = \lim_{s \rightarrow 0} \arctan \frac{a}{s} = \frac{\pi}{2}$$

integralinin değerini bulmuş oluruz.

Örnek 7.9

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = ?$$

(7.7) formülünden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2t}\right\} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 + 4}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} \Big|_s^\infty = \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4}{s^2}\right) \end{aligned}$$

dönüşümü çıkar.

Örnek 7.10 $\mathcal{L}\{\sinh(2\sqrt{t})\} = ?$

Fonksiyonun seri açılımının terim terim Laplace dönüşümü alınır ve (7.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh(2\sqrt{t})\} &= \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathcal{L}\{t^{n+\frac{1}{2}}\} \\ &= \sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{s^n} = \sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}} e^{1/s}. \end{aligned}$$



7.3.5 Başlangıç ve Son-Değer Teoremleri

Teorem 7.5 (*Başlangıç-Değer Teoremi*) $f(t)$ $t > 0$ için sürekli ve üstel mertebden, $f'(t)$ $t \geq 0$ için parça parça sürekli olsun. O zaman

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Kanıt: Laplace dönüşümlerinin genel özeliğinden $s \rightarrow \infty$ için $G(s) = \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$ fonksiyonu sıfıra gider. O halde

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s) - f(0^+)) = 0$$

limitine geçilirse teorem kanıtlanmış olur. ■

Teorem 7.6 (*Son-Değer Teoremi*) f başlangıç-değer teoreminin koşullarına sağlıyorsa ve $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ varsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

dir.



Kanıt: f fonksiyonu sınırlı olduğundan $\alpha = 0$ mertebeden bir fonksiyondur. Türev dönüşüm formülünden

$$G(s) = \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+), \quad s > 0$$

dir. Limite geçerek

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0^+)) \quad (7.24)$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{\infty} f'(t) dt.$$

Yukarıda limitin integral içine geçebildiğine dikkat edin (?).

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} f'(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [f(\tau) - f(0^+)] \quad (7.25)$$

yazılabilir. Sonuç olarak, (7.24) ve (7.25) sonuçları karşılaştırılırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

elde ederiz. ■



7.3.6 Ters Laplace Dönüşümü

Eğer $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ise $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ görüntü fonksiyonun ters Laplace dönüşümü adı verilir ve

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

yazılır. Ters Laplace dönüşümü de lineer bir işlemdir, yani $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ve $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = f(t) + g(t)$$

dir. Biçimsel olarak

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L} = \mathbb{1}$$

yazılabilir. Burada $\mathbb{1}$ birim operatörü göstermektedir.

Ters Dönüşümün Tekliği: Aşağıdaki teorem bir $F(s)$ fonksiyonunun ters dönüşümünü garanti eder. Teoremin kanıtı daha ileri kitaplarda bulunabilir.

Teorem 7.7 Lerch Teoremi:

Bir $F(s)$ fonksiyonu verildiğinde, Laplace dönüşümü $F(s)$ olan $t \geq 0$ için tanımlı en çok bir sürekli $f(t)$ fonksiyonu vardır.

Laplace dönüşümü için verilen özelliklere ters dönüşüm operatörü uygulayarak aşağıdaki kuralları hemen yazabiliriz:



Ölçek Değişim Özeliği:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ ise}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

Birinci Öteleme Özeliği:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at}f(t).$$

İkinci Öteleme Özeliği:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}.$$

Türevlerin Ters Dönüşümleri:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = (-1)^n t^n f(t).$$

Bir fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulmak için çeşitli yöntemler uygulanabilir. Örneklerle bu yöntemleri gözden geçirelim.

**Örnek 7.14**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}, \quad n \geq 1.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = e^{at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Kesirli üstler için faktoriyel yerine Gamma fonksiyonu kullanılmalıdır. Örneğin,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Öteleme formülü ile

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{as+b}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{b}{a}} \mathcal{L}^{-1}\{s^{-1/2}\} = e^{-\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{t}{a\pi}}$$

bulunur.

**Örnek 7.15**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\} = ?$$

$F(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$ fonksiyonunun türevinin ters dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s}\right\} = 2(\cos t - 1)$$

ile $\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)$ bağıntısı

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{2(1 - \cos t)}{t}$$

sonucunu verir.

Örnek 7.16

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2 - 2as + a^2 + b^2}\right\} = ?$$

$$\frac{s+1}{s^2 - 2as + a^2 + b^2} = \frac{(s-a) + a+1}{(s-a)^2 + b^2}$$

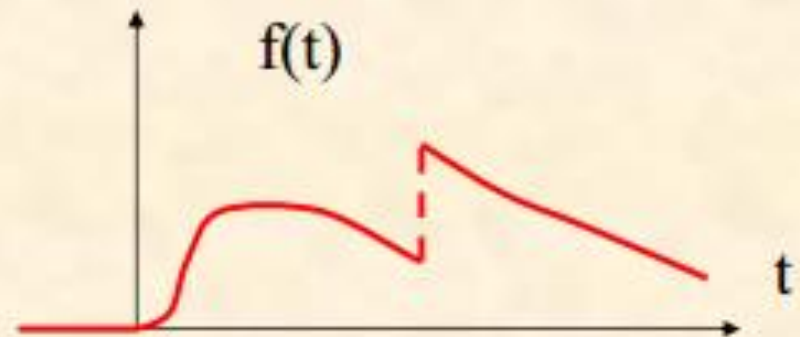
yazar ve ters dönüşümün lineerliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2 - 2as + a^2 + b^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a+1}{(s-a)^2 + b^2}\right\} \\ &= e^{at}\left[\cos bt + \frac{a+1}{b} \sin bt\right] \end{aligned}$$

bulunur.

Fonksiyonun tanımı $f(t)$

- $f(t)=0$, $t<0$
- $t \geq 0$ için tanımlı
- süreksizlik olabilir
- $|f(t)| < M \exp(\gamma t)$ [exponansiyel]
- s : reel veya kompleks



$F(s)$ in Laplace transformu

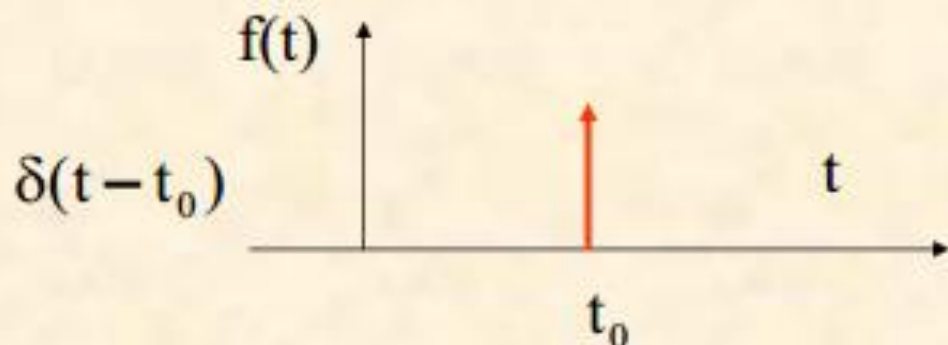
$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

birim impuls

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$



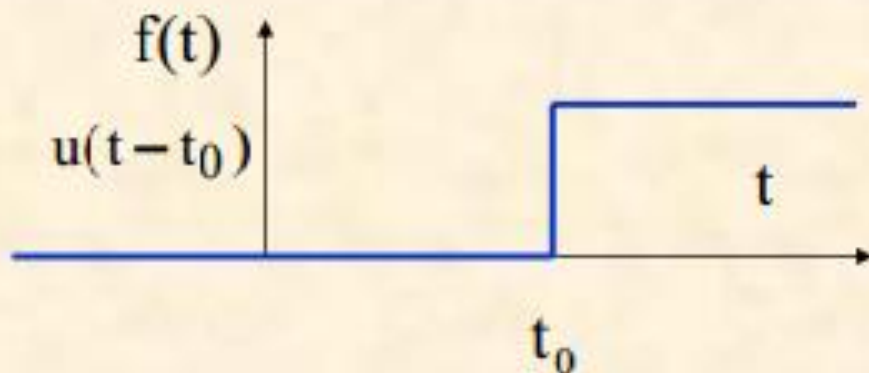
$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$



$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

Basamak sinyali

$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$



$$L[u(t - t_0)] = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t_0}^{\infty} = \frac{e^{-st_0}}{s}$$



Rampa



$$r(t) = at, t > 0$$

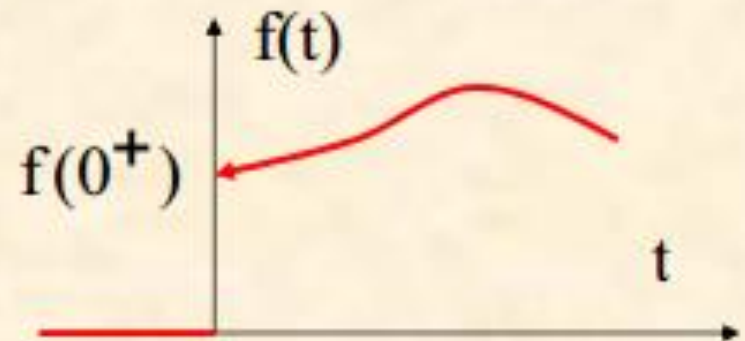
$$L[r(t)] = \int_0^{\infty} ate^{-st} dt = \left[\frac{-ate^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-a}{s} e^{-st} dt = \frac{a}{s^2}$$

- 1. Derece türev

$$L[f'(t)] = L\left[\frac{df}{dt}\right] = L[\dot{f}(t)] = s.F(s) - f(0^+)$$

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{f}(t) dt = \left[e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0^+)$$

$$L[f'(t)] = s.F(s) - f(0^+)$$



• Türev örnekler

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{d[\sin(\omega t)]}{dt} = \omega \cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega} \frac{d[\sin(\omega t)]}{dt}$$

$$L[\cos(\omega t)] = \frac{s}{\omega} L[\sin(\omega t)] - \frac{\sin(0^+)}{\omega} = \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} = -\omega \sin(\omega t)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{-1}{\omega} \frac{d[\cos(\omega t)]}{dt}$$

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{-s}{\omega} L[\cos(\omega t)] + \frac{\cos(0^+)}{\omega} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$$



	Functions of time, $f(t)$	Laplace Transforms of $f(t)$, $L\{f(t)\}$
1.	$f(t)$	$F(s)$
2.	$x(t) + y(t)$	$X(s) + Y(s)$
3.	$k.f(t)$	$k.F(s)$
4.	$df(t)/dt$	$sF(s) - f(0)$
5.	$d^n f(t)/dt^n$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
6.	$\int_0^t f(t).dt$	$F(s)/s$
7.	1	$1/s$
8.	t	$1/s^2$
9.	e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
10.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
11.	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12.	$f(t-a), t > a$	$e^{-as}F(s)$

$$y'' = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$



$f(t)$	$F(s)=L[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
t	$1/s^2$
t^n	$n!/s^{(n+1)}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin(at)$	$a/(s^2 + a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2 + a^2)$
$\text{sh}(at)$	$a/(s^2 - a^2)$
$\text{ch}(at)$	$s/(s^2 - a^2)$
$e^{bt} \sin(at)$	$a/[(s-b)^2 + a^2]$
$e^{bt} \cos(at)$	$(s-b)/[(s-b)^2 + a^2]$
$(e^{bt} - e^{at})/(b-a)$	$1/(s-a)(s-b)$
$(be^{bt} - ae^{at})/(b-a)$	$s/(s-a)(s-b)$

$a \neq b$

$a \neq b$