



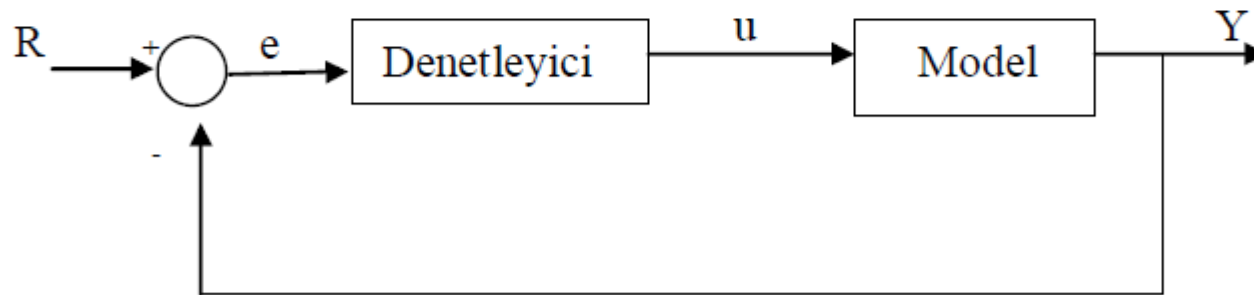
PID KONTROL

PID terimi İngilizce “Proportional” (oransal), “Integral” (integral), “Derivative” (türev) sözcüklerinin baş harflerinden oluşmuştur

PID algoritması proses üretime yönelik faaliyet gösteren endüstride en çok bilinen ve kullanılan bir geri beslemeli kontrol şeklidir. Tüm dünya üzerinde 50 yılı aşkın olarak kullanılmaktadır. Kolay, anlaşılabilir ve güvenilir algoritması ile mükemmel performans sağlamakta, değişken ve dinamik karakteristik özellikleri ile sanayide en çok tercih edilen kontrol tipi olarak ön plana çıkmaktadır.

PID DENETLEYİCİ TASARIMI

Bu kısımda, uygulamalarda yaygın olarak kullanılan üç terimli denetleyicini (PID: Proportional+Integral+Derivative) yapısı ve PID ile denetim sisteminin nasıl tasarlanabileceği açıklanacaktır. Oransal(P),integral(I) ve türev(D) denetimlerinin her birinin karakteristikleri ve istenen cevabı elde etmek için nasıl kullanılacakları gösterilecektir. Aşağıdaki birim geribildirimli sistemi ele alalım.



Geribildirimli Sistem

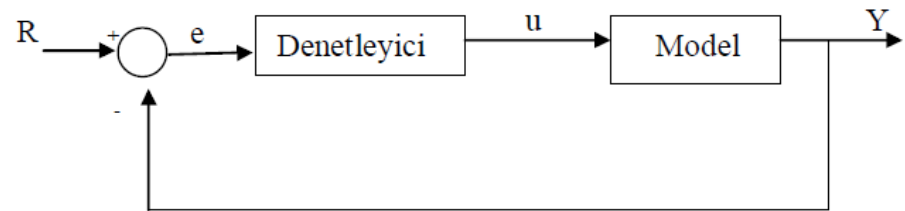
- e; hata işareti
- u; Etkiyen işaret
- Model; Kontrol edilen bir sistem
- Denetleyici; Modelin uyarılmasını sağlar, bütün sistem davranışını denetlemek için tasarlanmıştır

1.1 Üç Terimli Denetim

- PID denetleyicinin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$Kp + \frac{K_I}{s} + Kd.s = \frac{Kd.s^2 + Kp.s + K_I}{s}$$

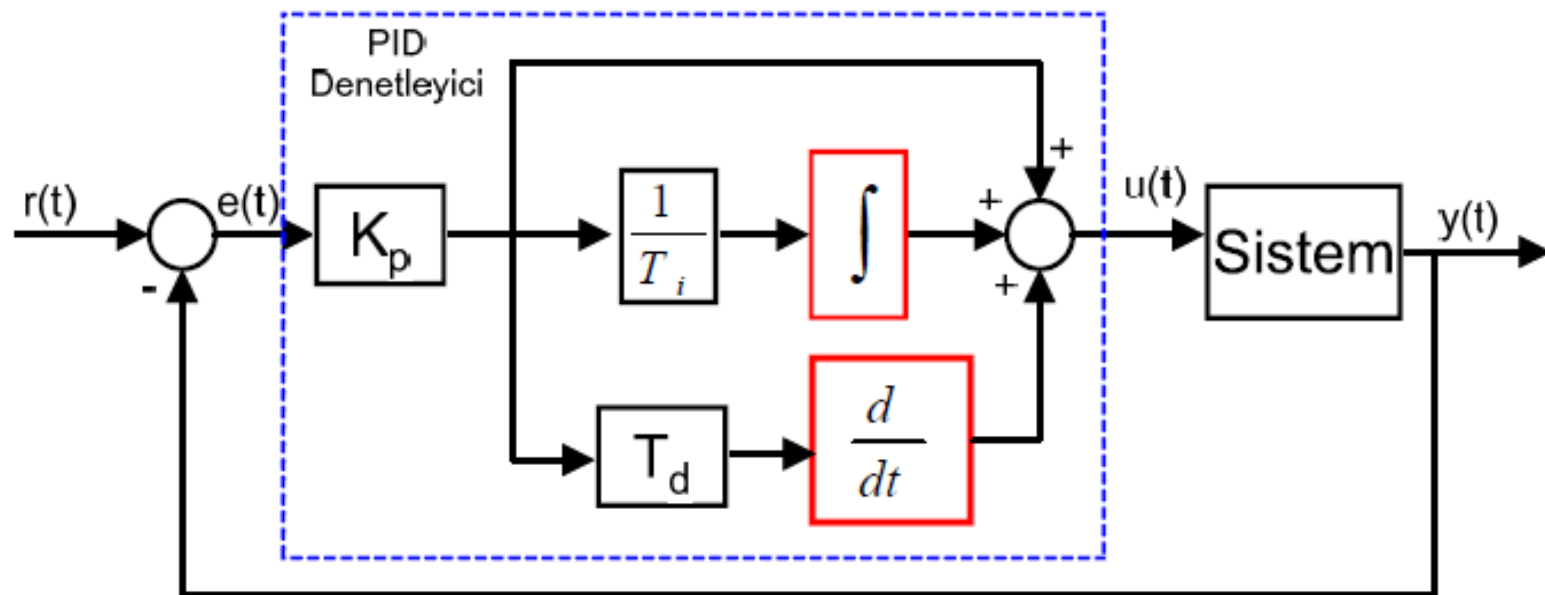
- Kp: Oransal kazanç
- Ki: İntegral kazanç
- Kd: Türevsel kazanç



- Yukarıdaki şemaya göre PID denetleyici kapalı bir sistemde nasıl çalışır görelim. Değişken(e), izleme hatasını temsil eder, istenen değer(R) ile gerçek çıkış(Y) arasındaki farktır. Hata sinyali(e) PID denetleyiciye gönderilir PID denetleyici bu hatanın hem integralini hem de türevini hesaplar. Şimdi kontrolörden çıkan (u) etkiyen işareti, hatanın büyüklüğünün (Kp) oransal kazancı katı artı, hatanın türevinin (Kd) katı artı hatanın integralinin (K_I) katına eşittir.

$$u = Kp.e + K_I \int e dt + Kd. \frac{de}{dt}$$

$$u(t) = K_P \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^{\infty} e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad \text{Standart PID İfadesi}$$



s-domeninde ise;
$$U(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) E(s)$$

veya

$$U(s) = \left(K_P + \underbrace{\frac{K_P}{T_i}}_{K_I} \cdot \frac{1}{s} + \underbrace{K_P T_d}_{K_D} \cdot s \right) E(s)$$

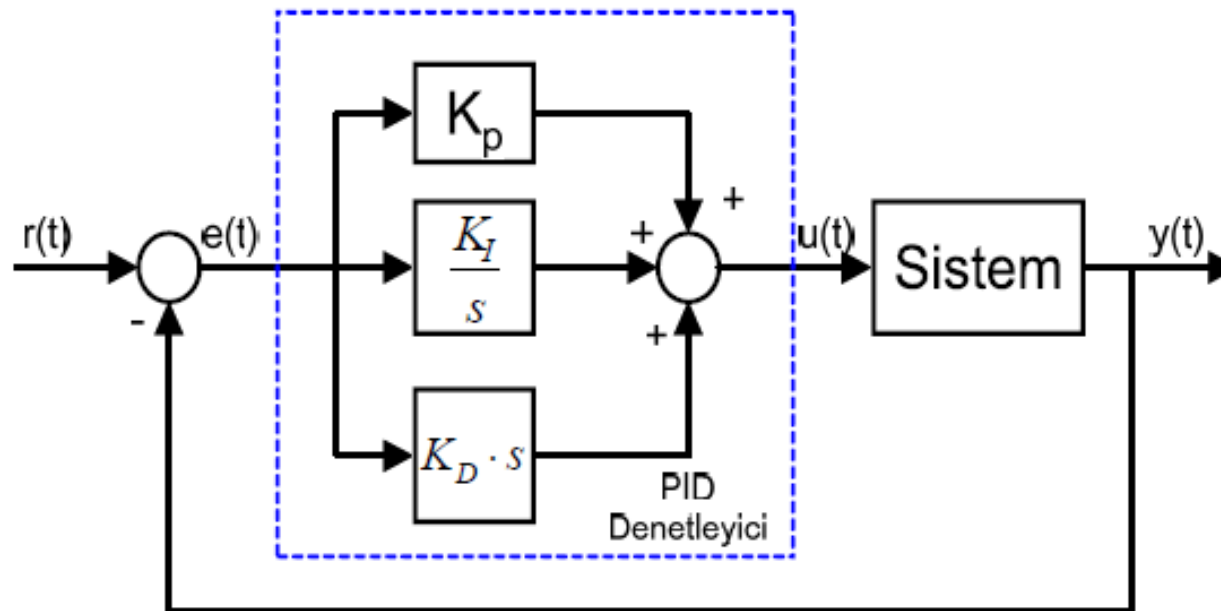
$$K_I = \frac{K_P}{T_i}$$

$$K_D = K_P T_d$$

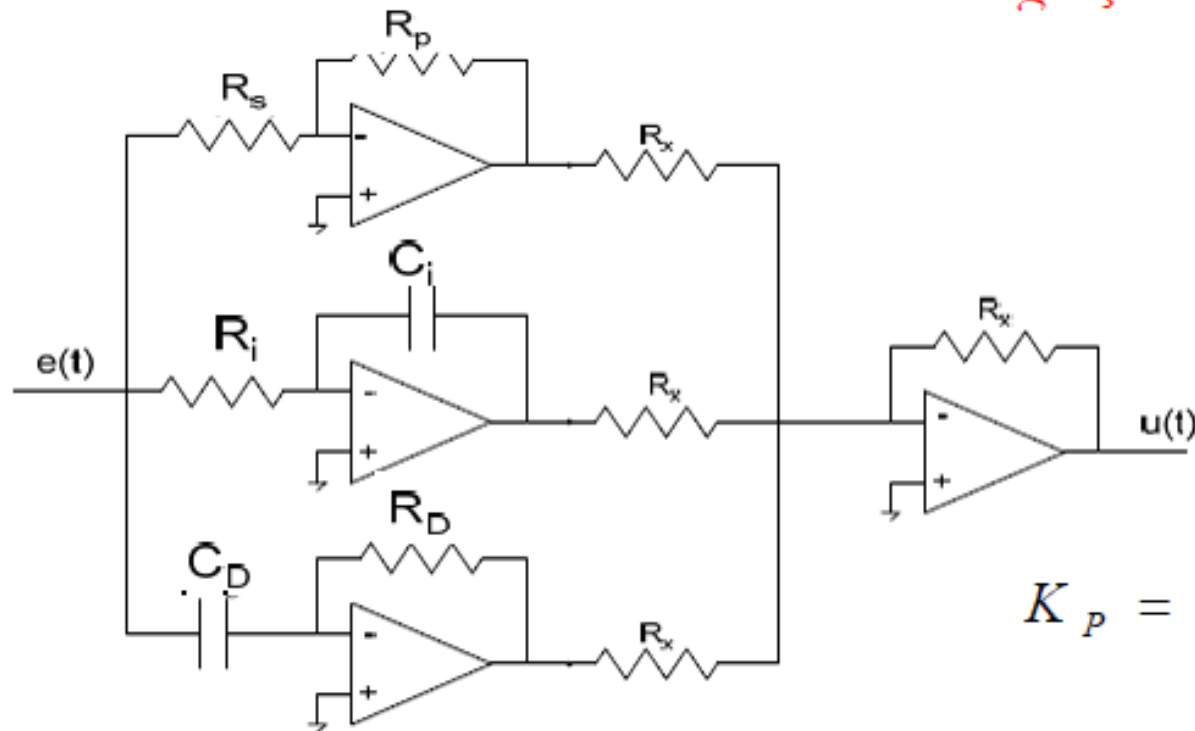
burada

$$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s \right) E(s)$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$



PID denetim sisteminin OP-AMP lar ile gerçekleştirilmesi:



$$K_P = \frac{R_P}{R_s}$$

$$K_I = \frac{1}{R_i C_i}$$

$$K_D = R_D C_D$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_P}{R_s} + \frac{1}{(R_i C_i)s} + (R_D C_D)s = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$

- Bu (u) işareti modele gönderilir ve yeni çıkış (Y) işareti elde edilir. Bu yeni çıkış işareti(Y) algılayıcıya tekrar geri gönderilir, böylece yeni hata sinyali(e) bulunur. Denetleyici yeni hata işaretini alır, integral ve türev değerlerini hesaplar. Bu işlem böyle sürer gider.

P,I ve D Denetleyicilerinin Karakteristikleri

- Bir oransal denetleyici (K_p), yükselme zamanını azaltmada etkili olur ama, kalıcı durum hatasını hiçbir zaman ortadan kaldıramaz.
- Bir integral denetleyici (K_i), kalıcı durum hatasını ortadan kaldırmada etkili olur ama geçici cevabı daha kötü yapabilir.
- Bir türevsel denetleyici (K_d), sistem kararlılığının artmasında, aşmanın azalmasında ve geçici cevabın düzelmesinde etkili olur.
- Her bir denetleyicinin (K_p, K_d, K_i) kapalı döngülü bir sisteme etkisi, aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

PID Denetleyicilerinin Karakteristikleri.

Denetleyici	Yükselme zamanı	Aşma	Yatışma zamanı	Kalıcı durum hatası (s-s error)
K_p	Kısalır	Artar	Az değişir	Azalır
K_i	Kısalır	Artar	Artar	Ortadan kalkar
K_d	Az değişir	Azalır	Azalır	Az değişir

- K_p,K_i,K_d birbirlerine bağımlı olduğu için bu bağıntılar tam kesin doğru olmayabilir.
- Birindeki değişme diğer ikisini etkileyebilir.
- Bu sebepten dolayı yukarıda verilen tablo sadece K_i, K_p, K_d değerlerini belirlerken bir tahmin referansı olarak kullanılmalıdır

NEDEN PID KONTROL?

Yüksek hassasiyette çalışma. (Set değeri ile ölçülen değerin en kısa zamanda birbirine çok yakın veya eşit hale gelmesi)

Taşmaları azaltma. (Özellikle soğuktan çalıştırmalarda ölçülen değerin set değerinin çok üstüne taşmasına engel olma)

Proses gürültülerinden daha az etkilenme. (Besleme voltajı oynamaları, proses gereği harici ani soğutma veya ısıtmalar, sistemde yer alan diğer elektrik/mechanik aksamın (motor, pompa, v.b.) karakteristiklerinde oluşan değişimler.)

PID KONTROL UYGULAMALARI

SICAKLIK UYGULAMALARI

- Genel kimyasal prosesler,
- Ambalaj ve etiketleme,
- Plastik enjeksiyon ve ekstrüzyon,
- Isıl işlemler,
- Elektrostatik toz boya fırınları,
- Gıda makinaları,
- Tekstil makinaları,
- Buhar ve kızgın yağ kazanları,
- Klima sistemleri v.b.

BASINÇ UYGULAMALARI

- Plastik ve metal enjeksiyon ve ekstrüzyonu,
- Hidrolik presler,
 - Gıda makinaları,
 - Tekstil makinaları,
 - Buhar kazanları v.b.

DİĞER UYGULAMALAR

- Akış miktarı (debi) ölçüm ve kontrolü,
- Seviye (tank, silo, v.b.) ölçüm ve kontrolü,
- Yoğunluk, pH, iletkenlik, v.b. ölçümler.

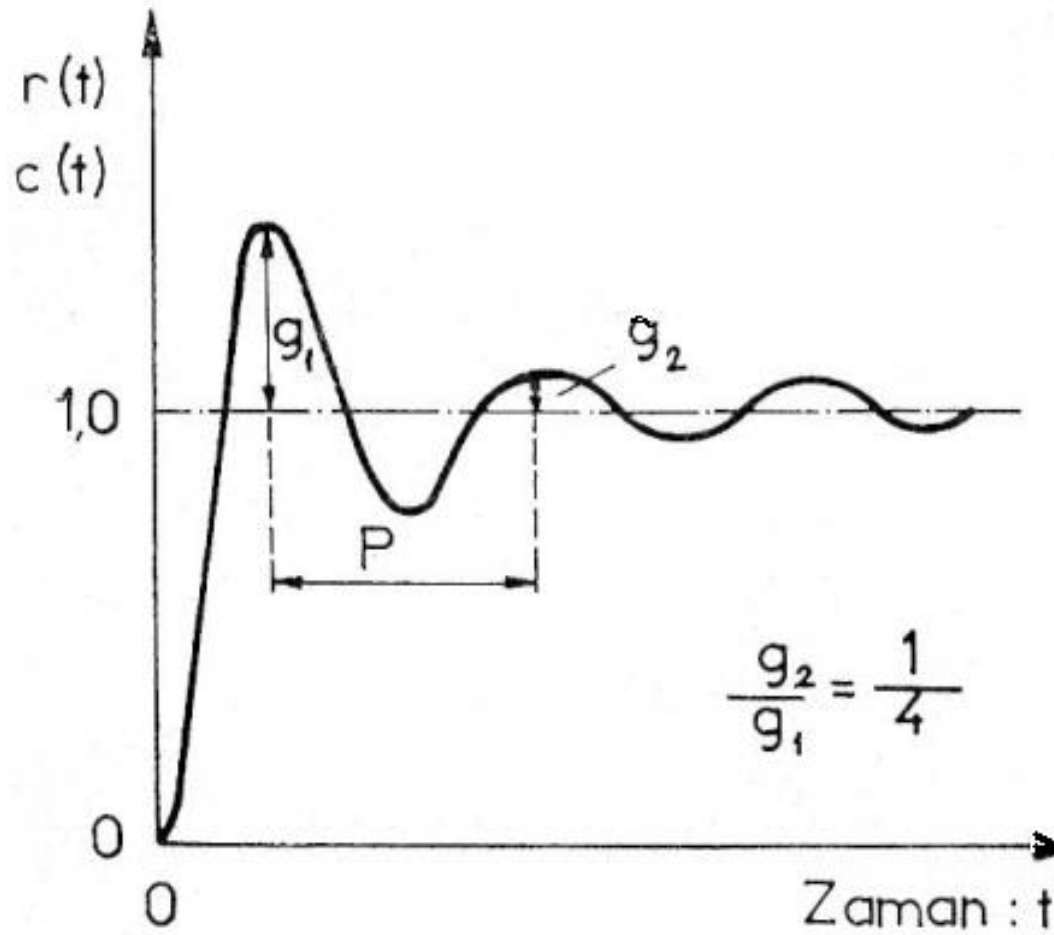


KONTROL ORGANININ AYARI

Uygulamada, kullanılan kontrol organlarının iyi sonuç verecek şekilde (optimum) ayarlanması önemli bir kontrol problemidir. Kontrol organının tipine bağlı olarak, orantı kazancı K nin, integral zaman τ_i nin ve diferansiyel zaman τ_d nin optimum ayarı için deneysel ve hesaba dayanan metodlar geliştirilmiştir.

KONTROL ORGANININ DENEYSEL AYARI

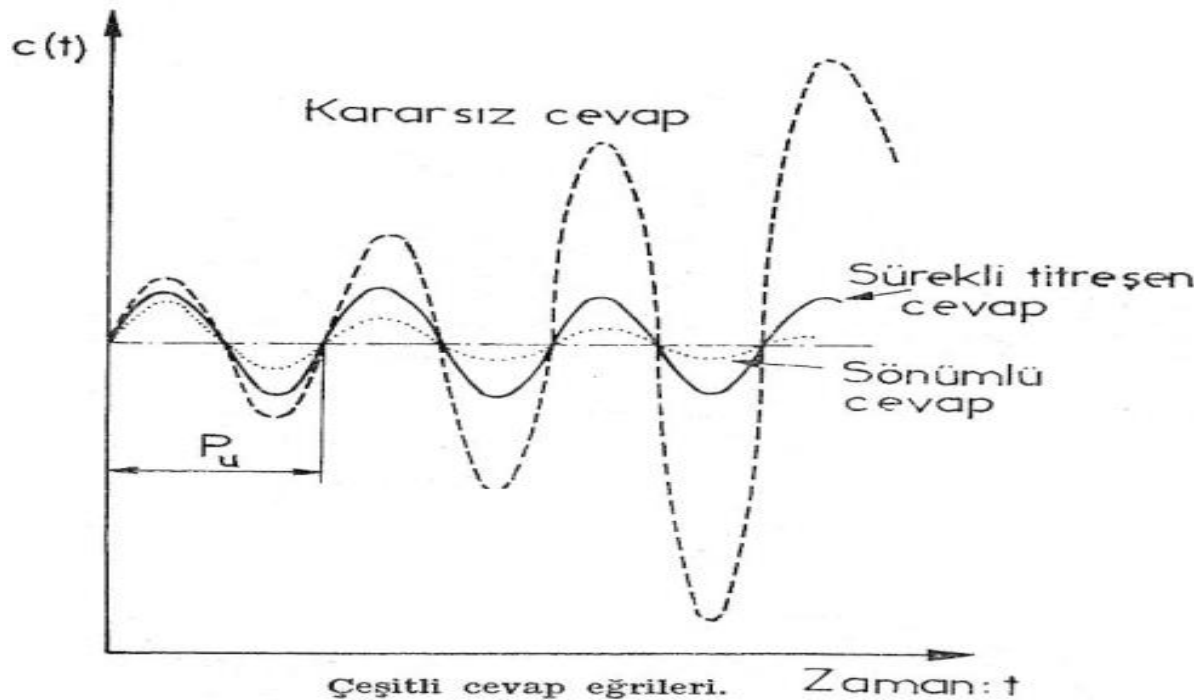
Kapalı çevrimli kontrol sisteminin referans değerinde basamak fonksiyonu şeklinde bir uyarı sağlandığı zaman, sistem cevabının (kontrol büyüklüğünün) yeni daimi rejim değerine en kısa zamanda ve kararlı bir şekilde erişmesini sağlayan kontrol organı ayarı optimum ayar kabul edilir. Bu amaçla seçilen bir ölçüt (kriter), kontrol büyüklüğü $c(t)$ eğrisinin ikinci aşma genliği g_2 nin, birinci aşma genliği g_1 in dörtte biri olmasıdır: $g_2/g_1 = 1/4$, Şekil 8.1. 1/4 genlik oranı ölçütünün matematik bir dayanağı olmamasına rağmen hızlı cevap ve çabuk sönümlleme sağladığı deneysel olarak saptanmıştır. Ancak bu ölçüte göre bulunacak kontrol organı ayar değerlerinin tek olmadığı da bilinmektedir. Aşağıda bugün kullanılmakta olan deneysel metodların önemli birkaçına değinilecektir.



1/4 iniş oranına sahip sistem cevap eğrisi.

Sürekli titreşim metodu :

Deneyssel metodlar arasında en tanınmış olanlardan biridir. Bu metod Ziegler ve Nichols isimli iki araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Bu metodun esası kapalı çevrimli kontrol sistemini sadece orantı kazancı ile deneye tâbi tutmaktır. İntegral zaman sonsuza ayarlanır ($\tau_i = \infty$), diferansiyel zaman sıfıra ayarlanır ($\tau_d = 0$), böylece kontrol organı üzerinde sadece orantı etki kalır. Referans değerinde bir basamak değişmesi sağlanır. K kazanç değeri değiştirilerek deney birkaç defa tekrarlanır. Sürekli titreşim yapan cevap eğrisi, $c(t)$, veren K değerine K_{mak} denir, bu durumdaki titreşim peryoduna ise P_u denir.





Ziegler ve Nichols pek çok deney yaparak sonuçların korelasyonunu sağlamışlardır. Bu sonuçlara göre, muhtelif kontrol organı tiplerinde çoğunlukla $1/4$ genlik oranı ölçütünü sağlayan uygun ayar değerlerini K_{mak} ve P_u ya bağlı olarak vermişlerdir.

Orantı (P) kontrol organı için : $K=0,5 K_{mak}$

Orantı + İntegral (PI) kontrol organı için :

$$K=0,45 K_{mak}$$

$$\tau_i = P_u / 1,2$$

Orantı + Diferansiyel (PD) kontrol organı için :

$$K=0,6 K_{mak}$$

$$\tau_d = P_u / 8$$

Orantı + İntegral + Diferansiyel (PID) kontrol organı için :

$$K=0,6 K_{mak}$$

$$\tau_i = P_u / 2$$

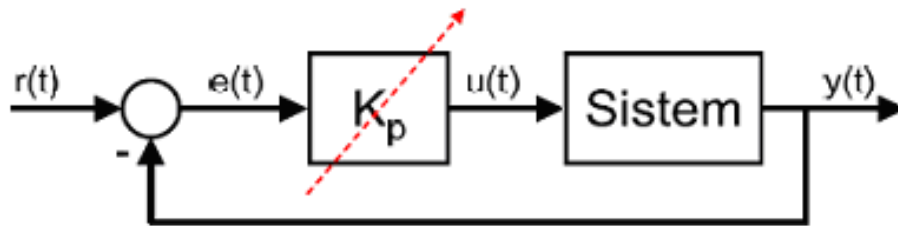
$$\tau_d = P_u / 8$$

Deneysel ayarda 2 yöntem uygulanır

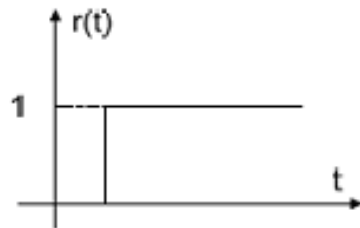
1. Salınım veya sürekli titreşim metodu
2. Sistem cevabı yöntemi

1- Salınım veya titreşim yöntemi

1. PID denetleyicide ilk olarak sadece P bırakılır. ($T_i = \infty$ ve $T_d = 0$)



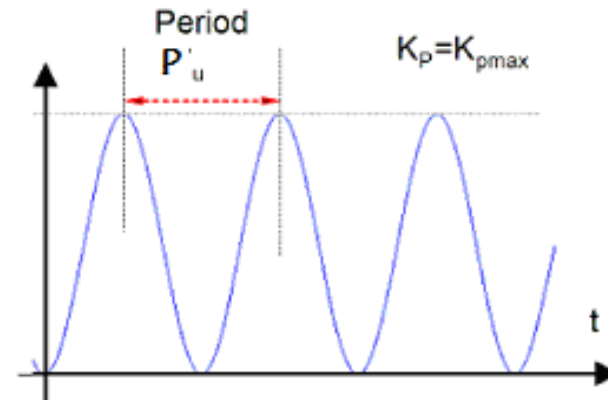
- 2- Girişe bir basamak giriş uygulanır.
- 3- K_p artırılarak sistem kritik kararlı hale getirilir.



- 4- K_{pmax} ve P'_u çıkış periyodu kaydedilir.

Zieglen-Nichols Sürekli Titreşim metodu

	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K$	-	-
PI	$0.45K$	$P/1.2$	-
PD	$0.6K$	-	$P/8$
PID	$0.6K$	$P/2$	$P/8$





PI kontrol organı için tavsiye edilen kazanç değeri K , sadece orantı kontrol (P kontrol) için tavsiye edilen değerden % 10 daha düşüktür. Buna neden, integral etkinin sisteme faz gecikmesi katarak sistemin kararlılığını azaltmasıdır. Buna karşılık I etki hatayı sıfır yapar.

Diferansiyel etki ise sisteme faz avansı getirir, sistemin kararlı hale gelmesine yardımcı olur. Bu bakımdan daha büyük orantı kazancına gidilebilmektedir. Fakat büyük nakil gecikmesi olan sistemlerde diferansiyel etkinin önemi çok azalır.



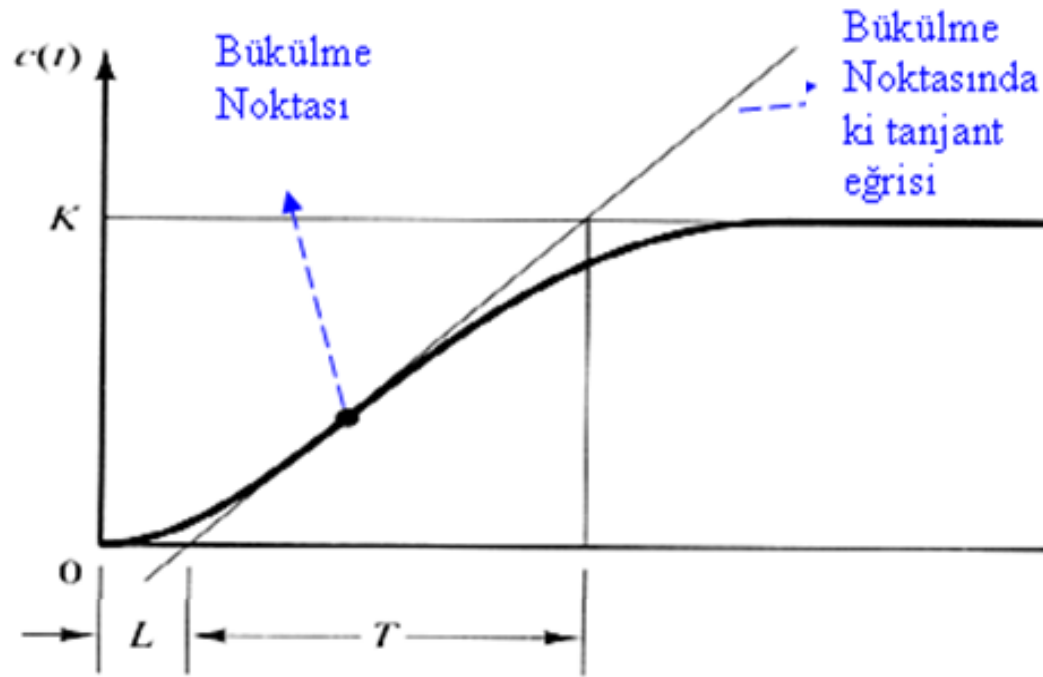
Açık Çevrim Ziegler–Nichols Metodu

Proses reaksiyon eğrisi metodu :

Ziegler ve Nichols tarafından teklif edilen ikinci bir metoddur. Bu metodun esası, açık çevrimli sistemin basamak değişmesine cevabını incelemektir. Kontrol çevrimi herhangi bir noktada, genellikle kontrol organı ile proses arasında, açılır. Kontrol organı elle ayar (manual) çalışma durumuna getirilir ve prosese basamak değişmesi uygulanır. Bu maksatla kontrol organının çıkışında bir basamak değişmesi sağlanır.

Örnek olarak: kontrol valfına beslenen hava basıncında basamak değişmesi uygulanır. Kontrol organı üzerinde kaydedilen proses çıkışı (kontrol büyüklüğü) eğrisi S—biçimli bir eğridir.

Proses reaksiyon eğrisi.



Açık-Döngü Ziegler- Nichols

	K_p	T_i	T_D
P	T/L	∞	0
PI	$0.9 \cdot T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2 \cdot T/L$	$2 \cdot L$	$0.5 \cdot L$



Sönümlü titreşim metodu :

Bazı proses kontrol sistemlerinde test maksadıyla sistemin devamlı titreşime maruz kalmasına müsaade edilmez. Bu bakımdan, Ziegler ve Nichols'un devamlı titreşim metodu kullanılamaz. Bu metodun Harriott tarafından düzeltilmiş şekli olan «sönümlü titreşim» metodu uygundur.

Sönümlü titreşim metodunda, yine sadece orantı kazancı ile işe başlanır. Orantı kazancı küçük bir değere ayarlanır, cevap eğrisinde 1/4 genlik oranı ile sönümleme elde edilinceye kadar kazanç artırılır. Bu andaki titreşim periyodu P ye bağlı olarak integral zaman ve diferansiyel zaman şöyle bulunur :

$$\tau_i = P/6$$

$$\tau_d = P/1,5$$

τ_i ve τ_d kontrol organı üzerinde yukarıda bulunan değerlere ayarlanarak, cevap eğrisinde 1/4 genlik oranı elde edilinceye kadar test ederek orantı kazancı yeniden saptanır.



Yukarıda anlatılan ve uygulamada geniş bir şekilde kullanılan metodlar, sadece optimum kontrol organı ayarlarına yakın değerler verir. Farklı prosesler için farklı optimum ayar değerleri elde edilir. Tavsiye edilen değerler, yalnızca başlangıç değerleri olarak ele alınmalı ve daha uygun çalışma şartlarının bulunması için deneylere devam edilmelidir.

KONTROL ORGANININ AYARLANMASINDA ANALİTİK YOL

Kontrol organının tipi, prosesin dinamiği ve ölçme organının dinamiği belli ise kontrol organının tipine göre mevcut bulunan K , τ_i ve τ_d parametrelerinin optimum değerleri analitik olarak hesaplanabilir. Bu maksatla, bir optimizasyon ölçütü seçilir ve bu ölçütü minimum yapan kontrol organı parametreleri saptanır. Optimizasyon ölçütünün (buna çok defa performans indeksi de denir) sistemde bulunan hataya bağlı olarak seçilmesi uygun olmaktadır. Bu şekilde bir ölçüt «hatanın karesinin integrali» olabilir :

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$



Yapılacak iş integral ifadesinin minimum olmasını sağlayan kontrol organı parametre değerlerini bulmaktır. Bunun için, bu parametrelere göre kısmî türevler alınıp sıfıra eşitlenir :

$$\frac{\partial I}{\partial K}=0, \quad \frac{\partial I}{\partial \tau_i}=0, \quad \frac{\partial I}{\partial \tau_d}=0$$

ve K , τ_i ve τ_d için çözülür.

Hesaplar teknik yönden mümkündür, fakat işlemler fevkalâde karışıktır; basit haller için dahi sayısal elektronik hesap makinası çözümüne gerek vardır.

KONTROL ORGANININ AYAR DEĞERLERİNİN BULUNMASINDA SİMÜLASYON METODLARI

Deneyssel metodlar bölümünde bahsi geçen «1/4 genlik oranı» ölçütünün bazı mahzurları vardır. Bunlardan biri, evvelce bahsedildiği gibi, bu kriterin iki ve üç etkili kontrol tiplerinde tek çözüm vermemesidir. Bundan başka, bu kriter cevap eğrisinde ikinci aşma genliğinin birinci aşma genliğine oranını esas almaktadır; halbuki, ikinci ve üçüncü aşma genliklerinin ve daha sonraki aşma genlik çiftlerinin oranları farklı olabilir. Bu bakımdan daha elverişli bir kriter seçilmesi faydalı olacaktır. Elverişli bir



kriter olarak «sistemde mevcut hatanın toplam değerinin minimum yapılması» seçilebilir. Hatanın zaman eksenini boyunca sürekli bir şekilde toplamı alınarak minimum yapılacağından bu kritere kısaca «hata integrali ölçütü» de denir. Bu ölçütün faydası kontrol organının optimum ayar değerleri için tek çözüm vermesi ve tamamen kapalı çevrim cevabını esas almasıdır. Kullanılan belli başlı dört ölçüt aşağıda verilmiştir.

1. Hatanın karesinin integrali (ISE) ölçütü :

$$\min. I = \min. \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

2. Zaman ağırlıklı hatanın karesinin integrali (ITSE) ölçütü :

$$\min. I = \min. \int_0^{\infty} t e^2(t) dt$$

3. Hatanın mutlak değerinin integrali (IAE) ölçütü :

$$\min. I = \min. \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$



4. Zaman ağırlıklı hatanın mutlak değerinin integrali (ITAE) ölçütü:

$$\min. I = \min. \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

Şüphesiz, bu 4 ölçütten birine göre bulunan optimum kontrol ayar değerleri, bir diğerine göre optimum olmayacaktır. ISE ölçütü büyük hata değerlerine daha büyük önem verirken, IAE ölçütü artı ve eksi hatalara eşit derecede ağırlık vermektedir; ITSE ve ITAE ölçütleri ise uzun bir zaman süresi mevcut bulunan hataları kuvvetle belirleyerek ortadan kaldırırlar. Kontrol mühendisi, kendi kontrol sistemi için en uygun ölçütün hangisi olduğunu seçme görevini de yüklenmektedir.

Özetle

Optimizasyon için tanımlanan maliyet fonksiyonları (performans indeksleri) şunlardır;

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad I = \int_0^{\infty} te^2(t) dt \quad I = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad I = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt$$



Analog Simulasyon

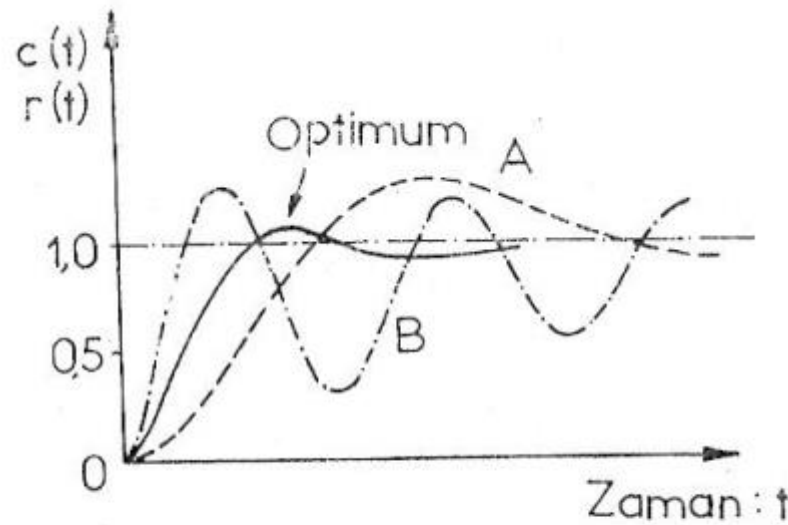
Kontrol çevriminin analog simulasyon devresini kurmak ve kontrol organına ait parametrelerin optimum değerlerini elde etmek mümkündür. Ne var ki, kontrolü sağlanan proses dinamiği genellikle bir «zaman gecikmesi» ihtiva eder ve bunun analog makinada simulasyonu kolay değildir.

Digital Simulasyon

Kontrol çevrimine ait bir akış diyagramı hazırlanır ve programlama dillerinden biri vasıtasıyla (örnek olarak Fortran dili) digital simulasyon sağlanır. Uygun bir sayısal minimum bulma metodu ile seçilen hataya bağlı optimizasyon ölçütünün, yani hata integralinin, minimumu aranır. Hata integralini minimum yapan kontrol organı ayar değerleri aranan optimum değerlerdir.

PI tipi bir kontrol organının, optimizasyon ölçütüne göre bulunan optimum ayar değerleri ile elde edilen optimum cevap eğrisini ve optimum olmayan ayar değerleriyle elde edilen cevap eğrilerini göstermektedir. Optimum olmayan cevap eğrileri A ve B sonunda sönümlenip referans değerine yaklaşmakla birlikte, hayli titreşimli (B) veya çok yavaş (A) bir geçici rejim göstermektedirler. Şekil (8.4) optimum çalışma-

Şek 8.4



Optimum ve optimum olmayan cevap eğrileri

(Optimizasyon ölçütü: $\min. I = \min. \int_0^{\infty} |e(t)| dt$).

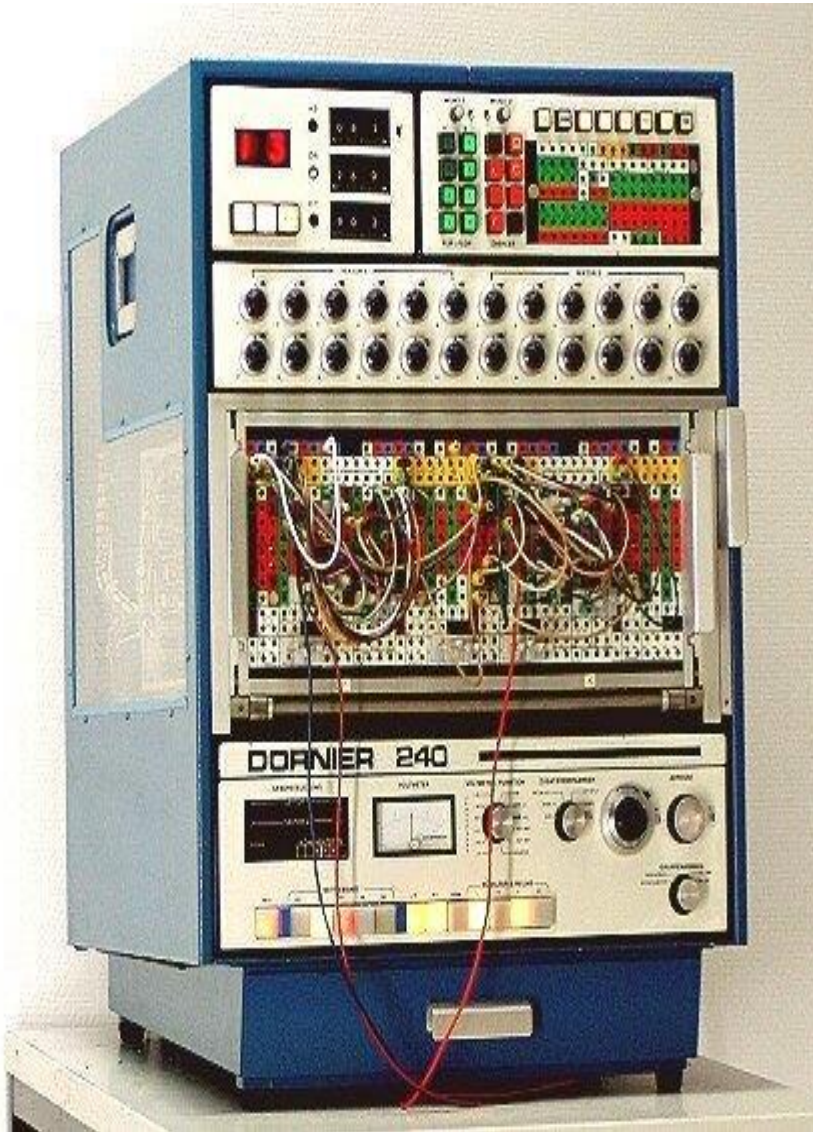
nın önemini açık bir şekilde ortaya koyar. Sistemin cevabı, optimum çalışmada, kısa sürede ve en az titreşim ile istenilen seviyeye ulaşır. Veya, bozucu büyüklük etkisi, sisteme fazla zarar vermeden yok edilir.



Digital simulasyonda, bazı kolaylıklar olmasına rağmen, sistemde mevcut diferansiyel denklemlerin çözümü, integral ve türev alma işlemleri nümerik metodlarla yapılır. Bu bakımdan, çözüm yaklaşıktır. Fakat, yeterli hassasiyette çözüm elde etmek daima mümkündür.

Hibrid Simulasyon

Hibrid elektronik makinalar analog ve digital kısımlardan oluşur; analog ve digital makinaların avantajlarına birarada sahiptir. Böylece, diferansiyel denklem çözümlerinin, integral ve türev alma işlemlerinin analog kısımda tam doğru olarak yapılması; zaman gecikmesi gibi elemanların digital kısımda simule edilmesi mümkün olur.



Analog Bilgisayar



Sayısal Bilgisayar



Hibrid Bilgisayar



TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

s domeninde hesaplar yapıldıktan sonra, zaman domenine geri dönmek ve sonucu zaman domeninde değerlendirmek istenebilir. Böylece, esas değişken olan t (zaman) değişkenine dönülmüş olur. Bu şekilde, kompleks değişkenli ifadenin zaman değişkenli ifadeye dönüştürülmesi için uygulanan matematik işleme «Ters dönüşüm» denir. Ters Laplace dönüşümü sembolik olarak

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

şeklinde gösterilir.

Matematik olarak $f(t)$, $F(s)$ ten aşağıdaki integral alma işlemi ile bulunur.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{ts} ds, \quad (t > 0)$$



verilen integral alma işlemi hayli karışıktır. Fakat, $F(s)$ belli iken $f(t)$ nin bulunması için integral işlemi yapmaya gerek yoktur. Laplace dönüşümü çiftlerini veren cetvel kullanmak suretiyle $f(t)$ kolaylıkla bulunabilir. Ancak, cetvellerin kullanılabilmesi için $F(s)$, $f(t)$ nin yegâne Laplace dönüşümü olmalı ve $F(s)$ den ters dönüşümle $f(t)$ elde edildiği zaman bu $f(t)$ fonksiyonu başlangıçta Laplace dönüşümü alınan yegâne $f(t)$ fonksiyonu olmalıdır. Böylece cetvellerle verilen dönüşüm çiftleri iki yönde de alınabilir.

$F(s)$ fonksiyonu, çoğunlukla, Laplace dönüşümü çiftleri cetvellerinde olduğu şekilde ortaya çıkmaz. Bu hallerde, $F(s)$ kısmi kesirlere ayrılmak suretiyle s nin basit fonksiyonları şeklinde yazılır ve böylece bilinen ters Laplace dönüşümleri yardımıyla, cetvellerden yararlanarak, $f(t)$ elde edilir.

Kontrol sistemlerinin incelenmesinde, $F(s)$ çoğunlukla aşağıdaki şekilde bulunur:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

Burada $A(s)$ ve $B(s)$ s değişkeninin birer polinomudur ve $B(s)$ nin mertebesi $A(s)$ nin mertebesinden büyüktür (veya en çok mertebeler eşittir).

ifadesinin basit kesirlere ayrılması ve sonunda $f(t)$ nin bulunmasında mümkün 3 hal aşağıda incelenmektedir.



	Functions of time, $f(t)$	Laplace Transforms of $f(t)$, $L\{f(t)\}$
1.	$f(t)$	$F(s)$
2.	$x(t) + y(t)$	$X(s) + Y(s)$
3.	$k \cdot f(t)$	$k \cdot F(s)$
4.	$df(t)/dt$	$sF(s) - f(0)$
5.	$d^n f(t)/dt^n$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
6.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$F(s)/s$
7.	1	$1/s$
8.	t	$1/s^2$
9.	e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
10.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
11.	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12.	$f(t-a), t > a$	$e^{-as}F(s)$

$$y' = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \rightarrow sY(s) - y(0)$$

$$y'' = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} \rightarrow s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$



Basit poller halli :

Eğer $F(s) = A(s)/B(s)$ basit pollere sahipse, yani $B(s) = (s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_n)$ şeklinde basit çarpanlara ayrılabilirse $F(s)$ basit kesirlerin toplamı şeklinde yazılabilir :

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \dots + \frac{K_i}{s-s_i} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n} \quad (2.51)$$

burada $K_1, K_2, \dots, K_n$ sabitlerdir. Bu sabitler

$$K_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s-s_i) \frac{A(s)}{B(s)} \quad (2.52)$$

olarak hesaplanır. Böylece hesaplanan $K_1, \dots, K_i, \dots, K_n$ ler ile ters dönüşüm olarak

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_i e^{s_i t} + \dots + K_n e^{s_n t} \quad (2.53)$$

bulunur. $f(t)$ nin üstel azalan bir fonksiyon olması için bütün s_i değerleri negatif olmalıdır. Eğer herhangi bir $s_i > 0$ ise t sonsuza giderken $f(t)$ sınırsız artar. Eğer herhangi bir $s_i = 0$ ise sabit terim elde edilir; Zira

$$K_i e^{(0)t} = K_i$$

dir.

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

**Örnek:**

$$x(s) = \frac{5s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

bunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$x(s) = \frac{K_{-1}}{s+1} + \frac{K_{-2}}{s+2} + \frac{K_{-3}}{s+3}$$

K_{-1} , K_{-2} , K_{-3} katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$K_{-1} = [(s+1).x(s)]|_{-1} = \frac{5(-1)+3}{(2-1)(3-1)} = -1$$

$$K_{-2} = [(s+2).x(s)]|_{-2} = \frac{5(-2)+3}{(1-2)(3-2)} = 7$$

$$K_{-3} = -6$$

$$x(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

$$\frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3} \xrightarrow{\text{invlaplace}} 7 \cdot e^{-2 \cdot t} - e^{-t} - 6 \cdot e^{-3 \cdot t}$$



$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+4)} = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+4)}$$

$$C_1 = (s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+4)} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

$$C_2 = (s+4) \frac{s+3}{(s+1)(s+4)} \Big|_{s=-4} = \frac{1}{3}$$

$$f(t) = (2/3)e^{-t} + (1/3)e^{-4t}$$



Katlı poller hali :

Eğer $B(s) = (s-s_r)^q (s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_{n-q})$ şeklinde çarpanlara ayrılıyorsa s_r kökü q defa tekrarlanıyor demektir. s_r ye

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

nin katlı polü denir. Bu halde $F(s)$ nin basit kesirleri

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{C_q}{(s-s_r)^q} + \frac{C_{q-1}}{(s-s_r)^{q-1}} + \dots + \frac{C_1}{s-s_r} +$$

$$+ \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \dots + \frac{K_{n-q}}{s-s_{n-q}}$$

olur.

Katlı terimlerin C sabitleri şöyle bulunur:

$$C_q = \lim_{s \rightarrow s_r} \left[(s-s_r)^q \frac{A(s)}{B(s)} \right]$$

$$C_{q-1} = \lim_{s \rightarrow s_r} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s-s_r)^q \frac{A(s)}{B(s)} \right] \right\}$$

$$C_{q-k} = \lim_{s \rightarrow s_r} \left\{ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left[(s-s_r)^q \frac{A(s)}{B(s)} \right] \right\}$$



$K_1, K_2, \dots, K_{n-q}$ sabitleri de basit poller halinde olduğu gibi hesaplandıktan sonra ters dönüşüm sağlanır :

$$f(t) = \left[\frac{C_q t^{q-1}}{(q-1)!} + \frac{C_{q-1} t^{q-2}}{(q-2)!} + \dots + \frac{C_2 t}{1!} + C_1 \right] e^{s_r t}$$

$$\frac{C_q}{(s-s_r)^q}$$

$$+ K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_{n-q} e^{s_{n-q} t}$$

$$\frac{C_{q-1}}{(s-s_r)^{q-1}}$$

Örnek :

$$\frac{K_1}{s-s_1}$$

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)}$$

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{C_1}{s+2} + \frac{K_1}{s+5}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 \cdot \frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)} = 2$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 \frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow -2} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{11s+28}{s+5} \right] \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{11(s+5) - (11s+28)}{(s+5)^2} \right] = 3$$



yerine koyarak

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2} - \frac{3}{s+5}$$

ve ters dönüşüm ile

$$\underline{f(t) = 2t e^{-2t} + 3 e^{-2t} - 3 e^{-5t}}$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -5} (s + 5) \frac{11s + 28}{(s+2)^2(s+5)} = -3$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \frac{A(s)}{B(s)}$$



Örnek: $x(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$ bu kısmi kesirlere,

$$x(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-2}}{s+2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3}$$

basit kökler,

1

3. dereceden kökler için,



Kompleks eşlenik poler hali :

$B(s)$ ye ait kompleks kökler daima eşlenik çiftler halinde bulunur. Bu kökler $a+jb$ ve $a-jb$ şeklindedir. Bu köklerle ilgili çarpanlar

$$(s-a-jb)(s-a+jb) = s^2 - 2as + (a^2 + b^2)$$

şeklindedir. Eğer

$$B(s) = (s-a-jb)(s-a+jb)(s-s_1) \dots (s-s_{n-2}) \quad \text{ise}$$

basit gerçel poler için uygulanan yöntemle basit kesirlere ayırarak

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{K_c}{s-a-jb} + \frac{K_{-c}}{s-a+jb} + \frac{K_1}{s-s_1} + \dots + \frac{K_{n-2}}{s-s_{n-2}}$$

$$\frac{1}{b} |K(a+jb)| e^{at} \sin(bt + \alpha)$$



yazılır ve ters dönüşümle

$$f(t) = K_c e^{(a+jb)t} + K_{-c} e^{(a-jb)t} + K_1 e^{s_1 t} + \dots + K_{n-2} e^{s_{n-2} t}$$

elde edilir.

K_c ve K_{-c} sabitleri benzer yolla hesaplanır:

$$K_c = \lim_{s \rightarrow a+jb} \left[(s-a-jb) \frac{A(s)}{(s-a-jb)(s-a+jb)(s-s_1) \dots (s-s_{n-2})} \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow a+jb} \left[\frac{1}{2jb} \frac{A(s)}{(s-s_1) \dots (s-s_{n-2})} \right] = \frac{1}{2jb} K(a+jb)$$

burada

$$\begin{aligned} K(a+jb) &= \lim_{s \rightarrow a+jb} \left[\frac{A(s)}{(s-s_1) \dots (s-s_{n-2})} \right] \\ &= \left[(s^2 - 2as + a^2 + b^2) \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=a+jb} \end{aligned}$$

dır.



Benzer olarak

$$K_{-c} = -\frac{1}{2jb} K(a-jb)$$

ve

$$K(a-jb) = \lim_{s \rightarrow a-jb} \left[\frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_{n-2})} \right]$$

$$= \left[(s^2 - 2as + a^2 + b^2) \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=a-jb}$$

dir.

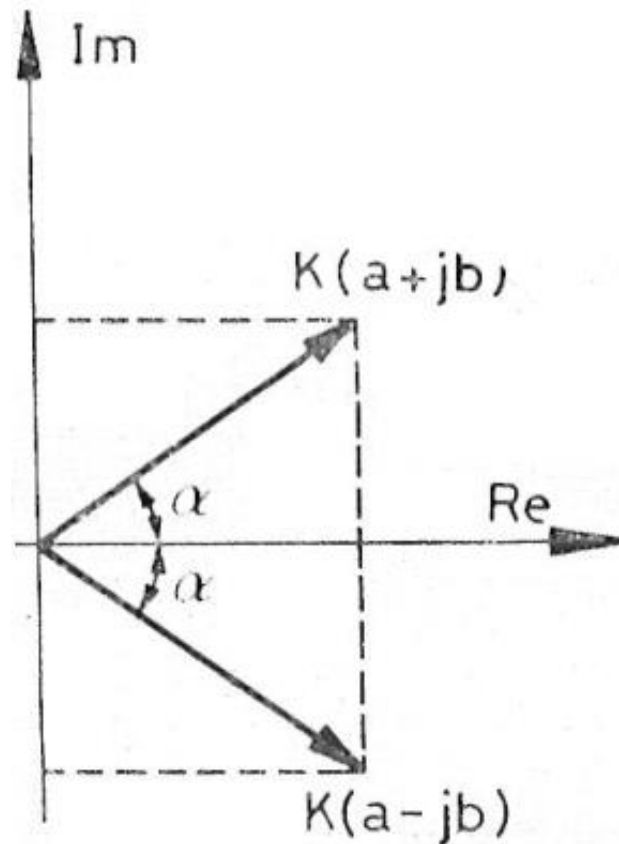
$K(a+jb)$ ve $K(a-jb)$ sabitleri eşlenik kompleks sayılarıdır.

$$K(a+jb) = |K(a+jb)| e^{j\alpha}$$

$$K(a-jb) = |K(a-jb)| e^{-j\alpha}$$

yazılabilir.

Bu sayılar kompleks düzlemde birer vektör ile gösterilmiştir



Kompleks düzlemde vektörel gösteriş.



Ayrıca, $|K(a+jb)| = |K(a-jb)|$ dir. O halde

$$K_c = \frac{1}{2jb} |K(a+jb)| e^{j\alpha}$$

$$K_{-c} = -\frac{1}{2jb} |K(a+jb)| e^{-j\alpha}$$

yazılabilir.

yerine konarak

$$f(t) = \frac{1}{b} |K(a+jb)| e^{at} \frac{e^{j(bt+\alpha)} - e^{-j(bt+\alpha)}}{2j} + K_1 e^{s_1 t} + \dots + K_{n-2} e^{s_{n-2} t}$$

$$f(t) = \frac{1}{b} |K(a+jb)| e^{at} \sin(bt+\alpha) + K_1 e^{s_1 t} + \dots + K_{n-2} e^{s_{n-2} t}$$



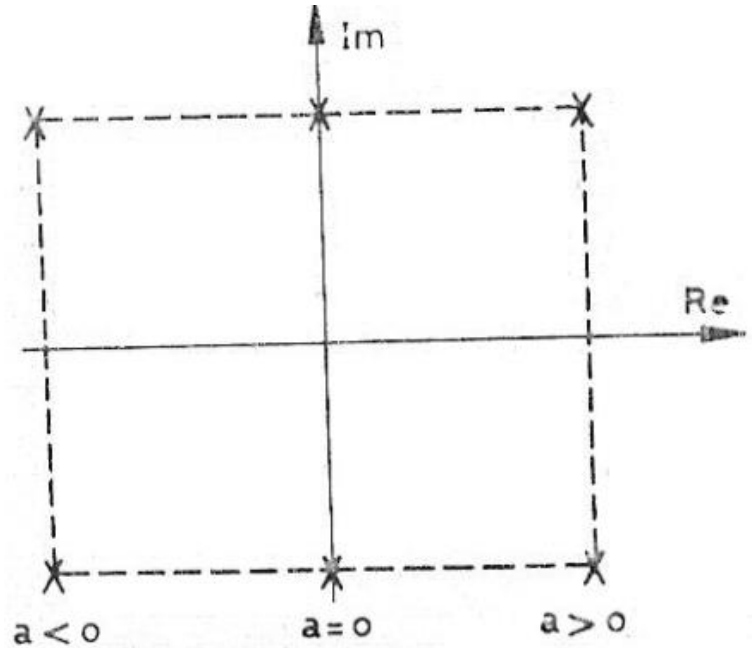
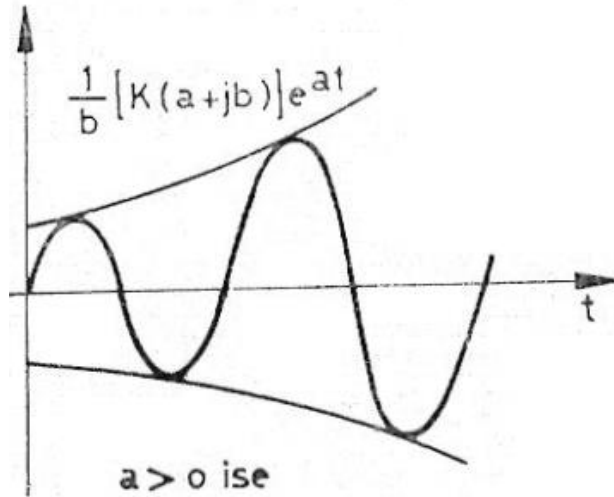
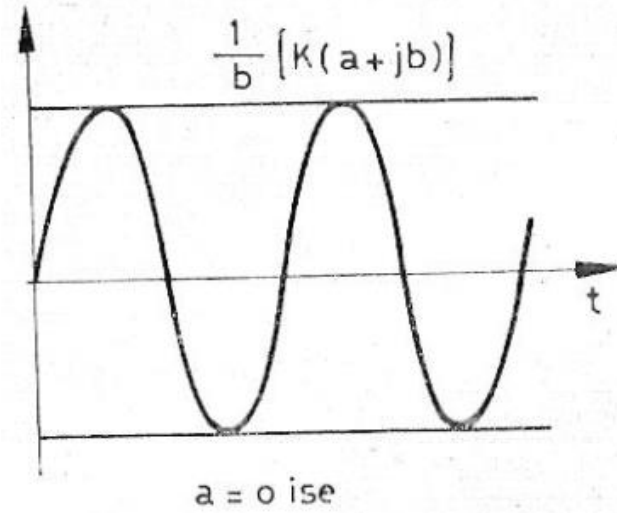
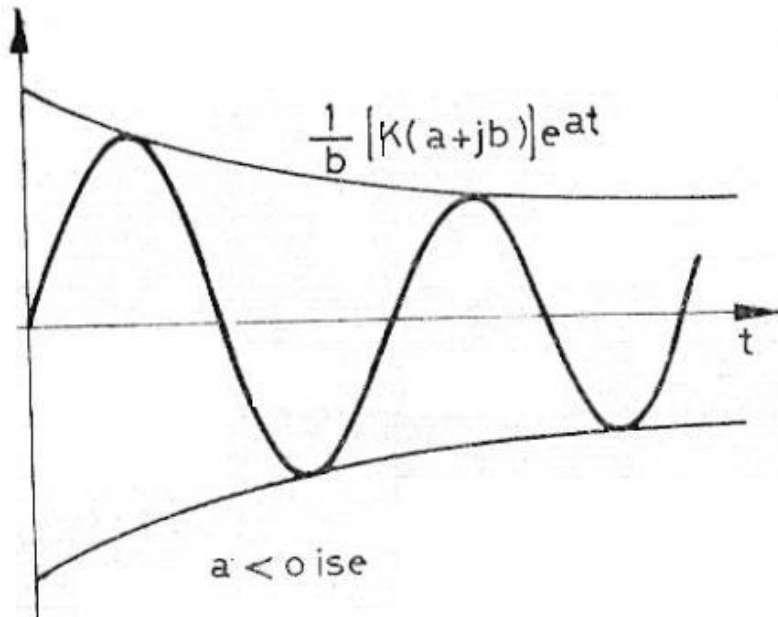
Böylece $f(t)$ üstel (eksponansiyel) zarf eğrili bir sinüs terimi ihtiva etmektedir. Bu sinusoidin zarf eğrisi

$$\frac{1}{b} |K(a+jb)| e^{at} \text{ dir ve } a < 0 \text{ için } e^{at}, t$$

büyürken üstel azalır; $a=0$ ise sinusoidin genliği

$$\frac{1}{b} |K(a+jb)|$$

olarak sabittir. $a > 0$ ise giderek artan bir sinusoid ortaya çıkar, Şekil 2.19. Şekil 2.19 da a nın pozitif, sıfır ve negatif olması durumlarında $(a+jb)$ eşlenik kök çiftinin kompleks düzlemdeki konumları ile tekabül eden $f(t)$ eğrisi gösterilmiştir. $f(t)$ eğrisi a ya bağlı olarak sönümlenen sinüsoid, sabit genlikli sinüsoid veya artan genlikli sinüsoid olmaktadır.



Şekil 2.19 a'nın çeşitli değerleri için $(a+jb)$ eşlenik kök çiftinin kompleks düzlemdeki konumları ve ilgili sinusoidin zaman düzlemindeki değişim şekilleri.



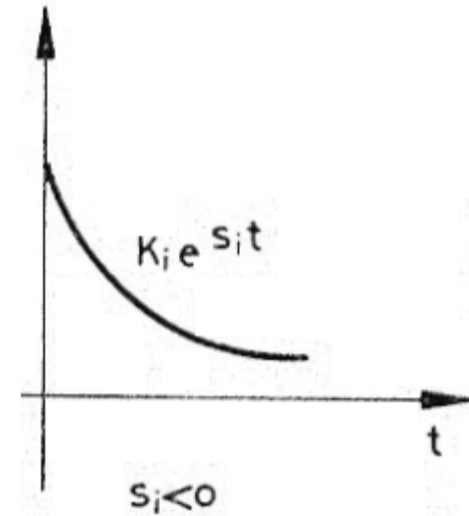
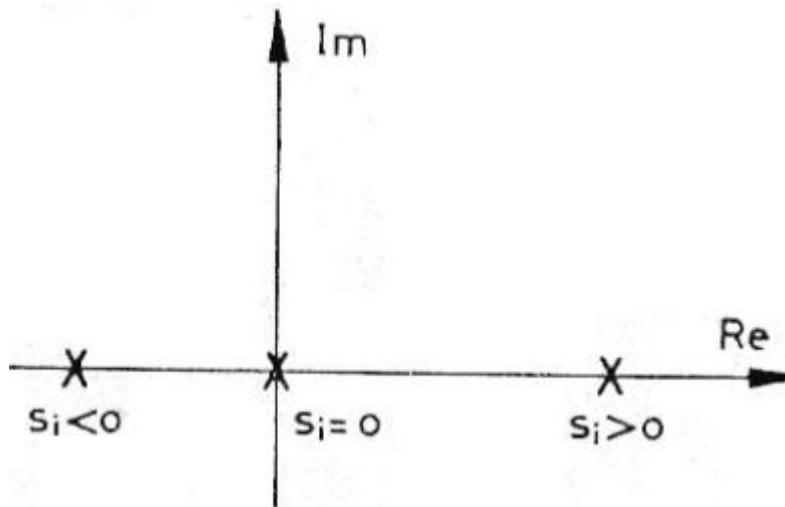
Benzer olarak, gerçel köklerden (diğer deyişle $F(s)$ nin basit polle-
rinden) dolayı $f(t)$ nin $K_i e^{s_i t}$ terimleri incelenebilir. Eğer

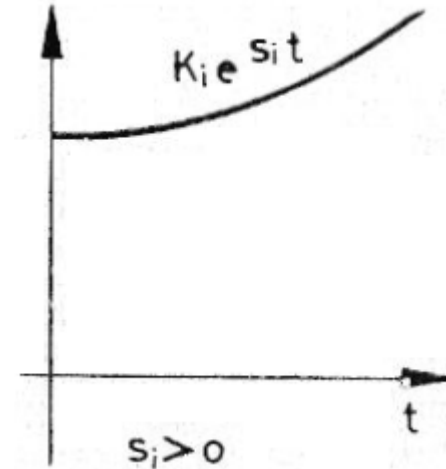
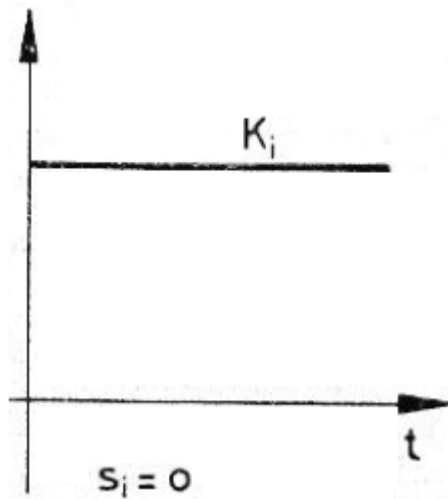
$s_i < 0$ ise $K_i e^{s_i t}$ terimi üstel azalır,

$s_i = 0$ ise $K_i e^{s_i t} = K_i$ olur,

$s_i > 0$ ise $K_i e^{s_i t}$ terimi üstel artar.

Bu söylenenler Şekil 2.20 de gösterilmiştir.





Şekil 2.20 $F(s)$ nin basit pollerinin kompleks düzlemdeki konumlarına göre zaman düzlemindeki değişimler.



Örnek

Aşağıda verilen ifadenin sıfırlarını ve kutuplarını bulunuz.

Buna göre kararlı olup olmadığını belirtiniz. Laplace dönüşümünü bulunuz.

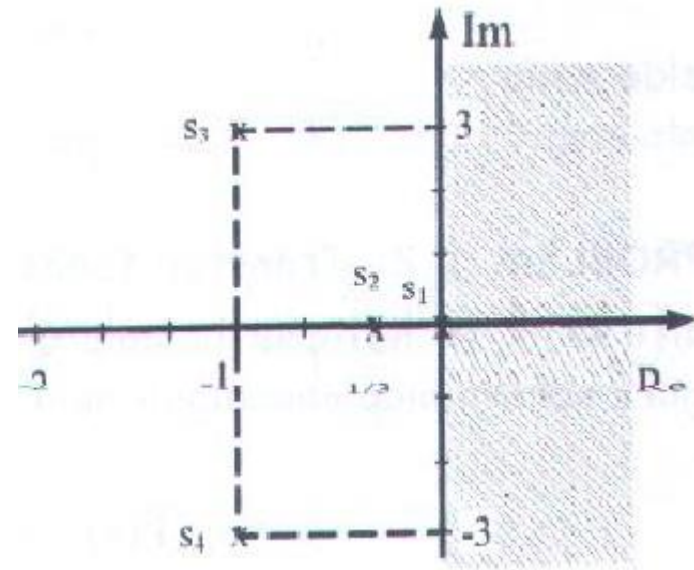
$$Y(s) = \frac{35}{s(3s+1)(s^2+2s+10)}$$

ÇÖZÜM: Transfer fonksiyonunun payı sabit bir sayı olduğu için sistemin sıfırları yoktur. Özyapısal denklemden sistemin kutupları,

$$s_1 = 0$$

$$3s+1=0 \Rightarrow s_2 = -\frac{1}{3}$$

$$s^2+2s+10=0 \Rightarrow s_{3,4} = -1 \pm 3j$$



olarak bulunur. Sistemin kutupları karmaşık sayı düzleminin sol-yarı düzleminde olduğundan sistem **KARARLI**dır.

Transfer fonksiyonunu kesirlere ayırarak yazacak olursak,



$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1/3)} + \frac{K_c}{s+1-3j} + \frac{K_{-c}}{s+1+3j}$$

elde ederiz. Karmaşık sayı kök çiftinin Laplace dönüşümü için

$\frac{1}{b} |K(a + bj)| e^{at} \sin(bt + \alpha)$ yazılabilir. Cevap fonksiyonunu bulamak için

sabitler,

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{35}{\cancel{s}(3s+1)(s^2+2s+10)} \Rightarrow A = 3.5$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1/3} \cancel{(s+1/3)} \frac{35/3}{s\cancel{(s+1/3)}(s^2+2s+10)} \Rightarrow A = -3.7$$

$$K(a + bj) = \lim_{s \rightarrow -1+3j} \cancel{(s^2+2s+10)} \frac{35/3}{s(s+1/3)\cancel{(s^2+2s+10)}} = \frac{35}{(-1+3j)(-2+9j)}$$

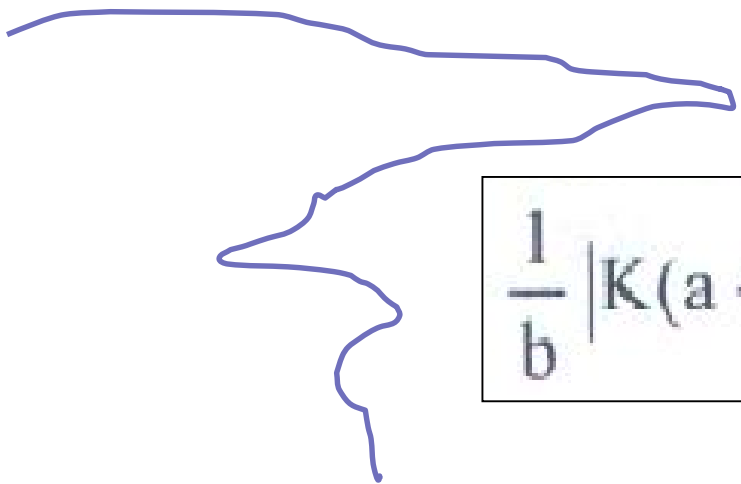
$$|K(a + bj)| = \frac{35}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+81}} = 1.2$$



$$\alpha = -\arctan \frac{3}{-1} - \arctan \frac{9}{-2} = -108.43^\circ - 102.53^\circ = -210.96^\circ * \frac{\pi}{180} = -3.68 \text{ rad}$$

elde edilir. Bulunan değerler yerine konduğunda fonksiyonun zaman alanı cevap için

$$y(t) = 3.5 u(t) - 3.27 e^{-t/3} + \frac{1}{3} 1.2 e^{-t} \sin(3t - 3.68)$$



$$\frac{1}{b} |K(a + bj)| e^{at} \sin(bt + \alpha)$$



LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Örnek

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} ; y(0) = -3, y'(0) = 5$$



$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$$

$$L[y''] - 3L[y'] + 2L[y] = 4L[e^{2t}]$$

$$[s^2Y(s) - s.y(0) - y'(0)] - 3[sY(s) - y(0)] + 2.Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$s^2Y(s) - s.y(0) - y'(0) - 3(sY(s) + 3) + 2.Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$s^2Y(s) + 3s - 5 - 3sY(s) - 9 + 2.Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$



$$Y(s) = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s - 2)} + \frac{14 - 3s}{s^2 - 3s + 2}$$

$\swarrow$
 $(s-1)(s-2)$

$$Y(s) = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

Kısmi kesirlere ayırarak

$$Y(s) = \frac{K}{(s-1)} + \frac{C_2}{(s-2)^2} + \frac{C_1}{(s-2)}$$

$$K = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2} = -7$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2)^2 \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2} = +4$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} (s-2)^2 \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2} = \left. \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)^2} \right|_{s=2} = +4$$

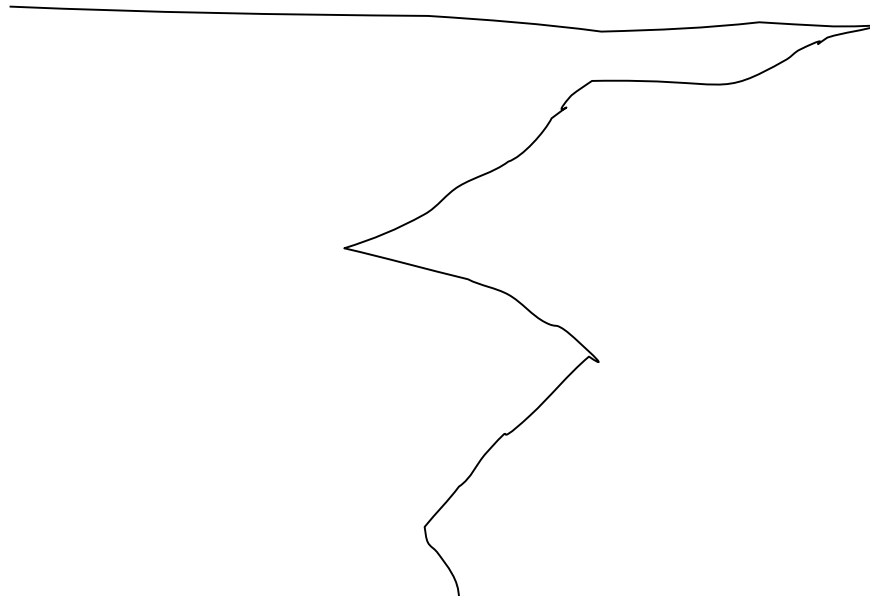


Katsayıları yerine koyarak;

$$Y(s) = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{4}{s-2}$$

Cetvel yardımıyla, ters dönüşüm yapılarak;

$$y(t) = -7.e^t + 4.te^{2t} + 4.e^{2t}$$





Kaynaklar

■ Otomatik Kontrol

(İ.T.Ü Matbaası 1989,Ahmet Kuzucu, Tahla Dinibütün, Nimet Özdaş)

■ Otomatik Kontrol (Benjamin Kuo)