



## DOĞRUSAL GERİBESLEMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIĞI

Kurulan modellere göre transfer fonksiyonu elde edilen bir sistemin dinamik davranışı geçici-durum cevabından saptanır. Denetim sistemlerinin, kararlılık, hızlı cevap ve hassasiyet şeklinde asgari üç özelliği sağlaması gerekir. Bir denetim sisteminin dinamik davranışının en önemli özelliği kararlılığıdır. Kararlı sistem, sınırlı bir cevaba sahip sistem olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle, eğer sistem sınırlı bir başvuru girişi ve bozucu giriş karşısında sınırlı büyüklükte bir cevap veriyorsa kararlıdır denir. Kararlı bir sistem, bir bozucu giriş karşısında geçici-durum davranışı gösterdikten sonra tekrar denge konumuna dönen sistemdir.

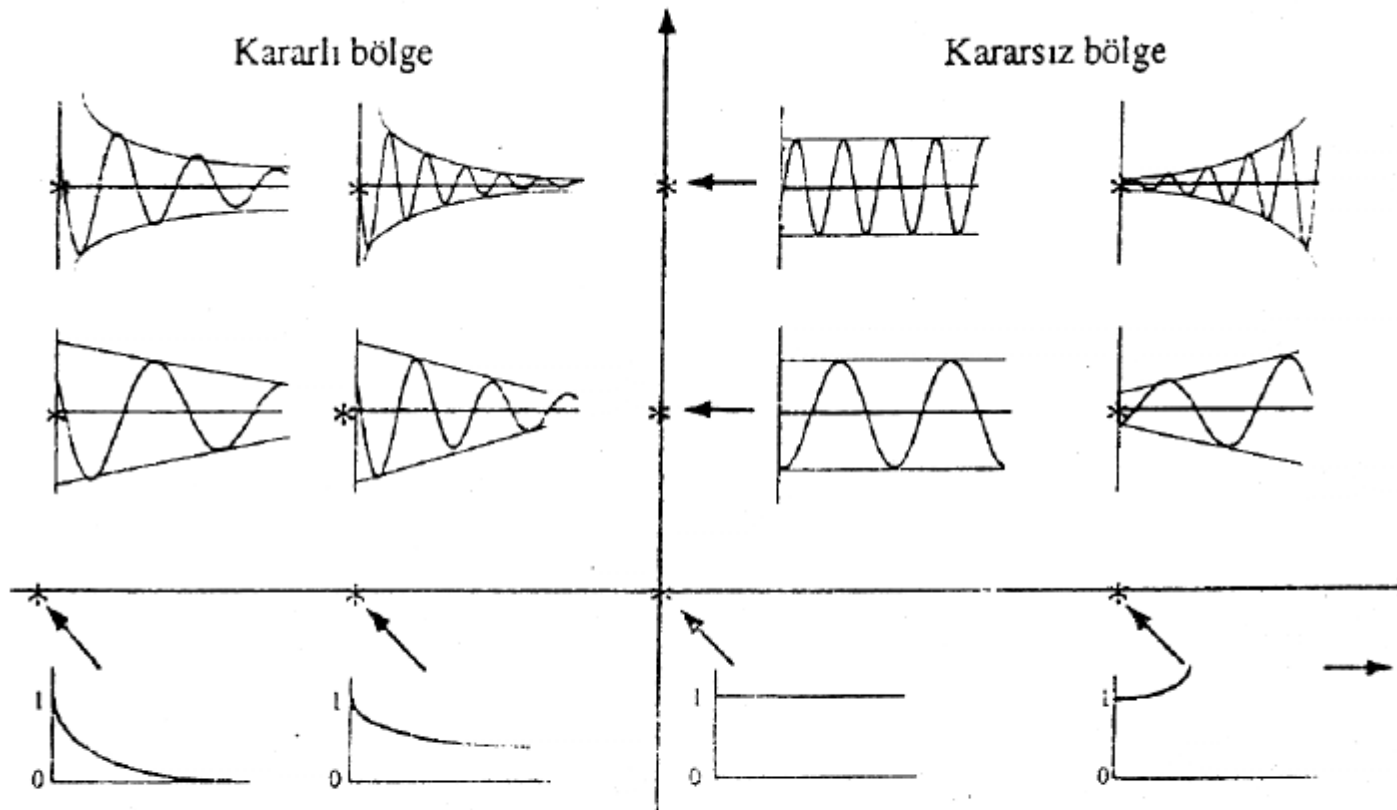
### KARMAŞIK DÜZLEMDE KARARLILIK ÇÖZÜMLEMESİ

Kapalı döngü bir sistemin kararlılığı transfer fonksiyonu kutuplarının karmaşık düzlemdeki (s-alanı) yerlerine göre saptanabilir. Sistemin kutupları ise transfer fonksiyonun paydası olan özyapısal denklemin kökleri olarak bulunur. Bir geribeslemeli sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart sistem transfer fonksiyonu kutuplarının negatif gerçel kısımlara sahip olmasıdır. Transfer fonksiyonu kutuplarının karmaşık düzlemdeki yeri sistemin kararlılığı yanında sistemin dinamik davranışını da tanımlar.



Arzu edilen kararlı bir cevaptır. Bu nedenle bir sistemin mutlak olarak kararlı olabilmesi için tüm kutuplarının sol yarı düzlem içinde yer alması gerekir. Kutuplardan bir tanesi dahi sağ yarı düzlemde yer alırsa sistem kararsız olur.

Bir geribeslemeli denetim sistemin kararlılığının belirlenebilmesi için transfer fonksiyonun paydası olan özyapısal denklemin köklerinin belirlenmesi gerekir. 's' in bir polinomu olan özyapısal denklemin derecesi küçük ise kökler kolaylıkla belirlenir. Buna karşılık polinomun derecesi büyüdükçe köklerin bulunması zorlaşır. Diğer taraftan sadece sistemin kararlı olup olmadığının bulunması gerektiğinde özyapısal denklemin köklerinin işaretinin belirlenmesi gereği kadar bilgi sağlayabilir. Bu durumda köklerin bulunmasına gerek kalmadan kararlılığın incelenmesi yeterli olabilir. Karmaşık sayı düzleminde köklerin bulunmasına gerek kalmadan kararlılığın incelenmesi Routh-Hurwitz kararlılık ölçütü ile yapılabilmektedir.



Köklerin s-düzlemindeki yerlerine bağlı olarak değişen çeşitli ani darbe cevap eğrileri



## ROUTH-HURWITZ KARARLILIK ÖLÇÜTÜ

Routh-Hurwitz ölçütü bir polinom denklemin pozitif gerçel kısmılı kökleri bulunup bulunmadığını, denklemini çözmeden belirlemeye yarar. Routh-Hurwitz ölçütü özellikle yüksek dereceden polinomlarda köklerin incelenmesinde önemli kolaylık sağlar. Otomatik denetim sistemleri uygulamalarında sistem kararlılığı bu yöntemle özyapısal denklemin köklerinden incelenebilir.

Aşağıdaki özyapısal denklemi ele alalım.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.1.)$$

Bu denklemin normalize edildiği dolayısıyla  $a_n > 0$  olduğu varsayılmaktadır. Routh-Hurwitz ölçütü bir doğrusal sistemin kararlılığı için gerek ve yeterlilik kurallarını ileri koyar.

**(i) Gereklilik Şartı:** Polinom denklemin gerçel negatif kısımlı köklere sahip olması, dolayısıyla kararlı olabilmesi için denklemin tüm katsayılarının,  $a_i$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, n-1$  pozitif ve sıfırdan farklı olması gerekir. Aksi taktirde sistem ya kararsız ya da sınırlı (nötr) kararlı olur. Yalnız bu kural kararlılık için gerek şarttır, yeter şart değildir. Buna karşılık gereklilik kuralı sistemin kararsızlığını ispat etmekle beraber kararlılığını ispat etmez. Çünkü tüm katsayıları pozitif değerli bir polinom, kararsız veya sınırlı kararlı olabilir.

**(ii) Yeterlilik Şartı (Routh-Hurwitz Tablosu):** Pozitif değerli katsayılara sahip bir sistemin kararlılığının kesin olarak belirlenebilmesi için Routh tarafından ileri sürülen Routh-Hurwitz tablosu kullanılır. Polinomun katsayıları cinsinden Routh-Hurwitz tablosu diğer sayfada gösterildiği gibi satır ve sütunlardan meydana gelir. Görüldüğü gibi tablodaki ilk iki satıra doğrudan doğruya polinomun katsayıları yazılmaktadır.  $s$ 'nin kuvvetleri ( $s^n$ ,  $s^{n-2}$ ,  $s^0$ ) indeksleme amacı ile kullanılmıştır. Tablo  $(n+1)$  adet satırdan ibarettir. Üçüncü ve onu izleyen satırlar aşağıdaki hesaplamalar yoluyla elde edilir.



$$\begin{array}{l|llll}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \\
 s^3 & d_1 & d_2 & 0 & & \\
 s^2 & e_1 & e_2 & 0 & & \\
 s^1 & f_1 & 0 & & & \\
 s^0 & g_1 & & & & 
 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

Benzer şekilde  $b_4, b_5, \dots$  bulunur ve böylece üçüncü satır tamamlanmış olur. Bunu izleyen dördüncü satırı oluşturmak üzere aynı yolu izleyerek,

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

sonuçları bulunur.



Benzer yoldan gidilerek tablonun  $(n+1)$  satırına kadar tüm elemanları hesaplanır. Tablonun 1. sütununda yer alan elemanlar sistem kararlılığının belirlenmesinde kullanılır. Polinom denkleminin (özyapısal denkleminin) pozitif gerçel kısmı köklerinin sayısı tablonun 1. sütunundaki elemanların işaret değiştirme sayısına eşittir. Gereklik şartını sağlayan bir sistemin kararlı olabilmesi için Routh-Hurwitz tablosunun 1. sütunundaki elemanlardan hiç birinin işaret değiştirmemesi gerekir. Bu durum bu ölçütün yeterlilik şartıdır. Bu şartı sağlamayan sistem kararsızdır. 1. sütundaki işaret değişim sayısı sistemin sağ yarı düzlemde yer alan kutuplarının sayısını verir.

**Örnek:** Aşağıda transfer fonksiyonları verilen kontrol sistemlerinin kararlı, sınırlı kararlı veya kararsız olup olmadığını belirleyiniz.

$$a)T(s) = \frac{K}{(s+2)(s-5)(s+7)}$$

$$b)T(s) = \frac{K}{s(1+0.1s) + (s+100)}$$

$$c)T(s) = \frac{K}{(s+3)(s+2)(s+4)}$$



**Çözüm:** Yukarıda verilen sistemin kutupları (paydadaki kökleri) kolaylıkla bulunduktan ve koordinat sistemine yerleştirildikten sonra, sistemin kararlılığı ile ilgili sonuca varabilirsiniz.

**a) Özyapısal denklem:**  $(s+2)(s-5)(s+7) = 0$

$(s+2)(s+5)(s+7) = 0 \rightarrow$  Sistemin kutupları  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = +5$ ,  $s_3 = -7$  dir.

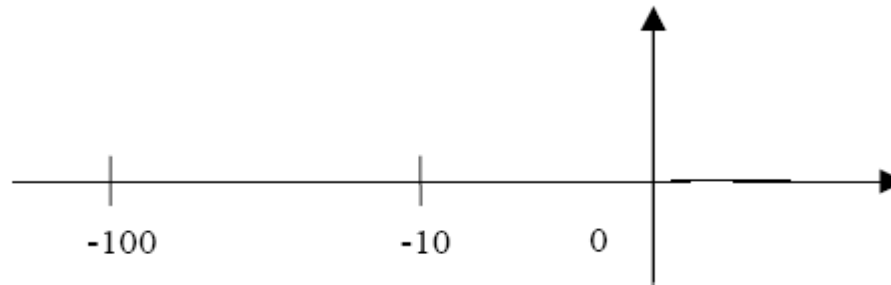
Bu kutupları koordinat sistemine yerleştirdiğimizde sağ tarafta bir tane kutbun olması sistemin kararsız olması için yeterlidir(Sistem kararsızdır).





**b) Özyapısal denklem:**  $s(1+0.1s)(s+100) = 0$

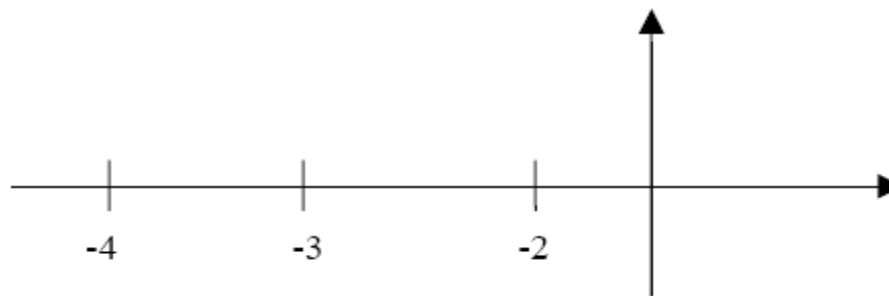
$$s(1+0.1s)(s+100) = 0 \rightarrow s_1 = 0, \quad s_2 = -10, \quad s_3 = -100$$



Kutuplardan biri orjinde ve diğerleri koordinat sisteminin solunda olduğu için sistem sınırlı kararlıdır.

**c) Özyapısal denklem:**  $(s+3)(s+2)(s+4) = 0$

$$(s+3)(s+2)(s+4) = 0 \rightarrow s_1 = -3, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -4$$



Sistemin bütün kutupları koordinat sisteminin sol tarafında bulunduğu için bu sistem ise kararlıdır.



**Örnek:**  $T(s) = \frac{s^2 - 4s + 20}{s^2 + (K - 4)s + (2K + 20)}$

Yukarıda transfer fonksiyonu verilen kontrol sistemini kararlı yapan K değerini bulunuz.

**Çözüm:**

Özyapısal denklem:  $s^2 + (K - 4)s^1 + (2K + 20)s^0 = 0$

Öncelikle böyle bir soruda gereklilik şartını incelemeliyiz.

\* Gereklilik şartı için özyapısal denklemindeki s parametrelerinin önündeki katsayılarının pozitif ve sıfırdan farklı olması gerekir.

$$K - 4 > 0 \rightarrow K > 4 \quad \text{ve} \quad 2K + 20 > 0 \rightarrow K > -10 \text{ olmalıdır.}$$

\* Yeterlilik şartı için Routh – Hurwitz tablosunun ilk sütunundaki katsayıların pozitif ve sıfırdan farklı olması gerekir).



$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & (2K+20) \\ s^1 & (K-4) & 0 \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & (2K+20) \\ (K-4) & 0 \end{vmatrix}}{(K-4)} = \frac{-[0 - (2K+20)(K-4)]}{(K-4)}$$

$$b_1 = 2K+20$$

$K - 4 > 0 \rightarrow K > 4$  ve  $2K + 20 > 0 \rightarrow K > -10$  olmalıdır.

K'nin çözüm kümesini bulmak için gereklilik ve yeterlilik şartındaki eşitsizliklerin ortak çözüm kümesini almalıyız.  $K > -10$  ve  $K > 4$  kümelerinin ortak çözüm kümesi  $K > 4$  dür.

Yani K'nın 4'ten büyük olduğu değerlerde ( $K > 4$ ) sistem kararlıdır.

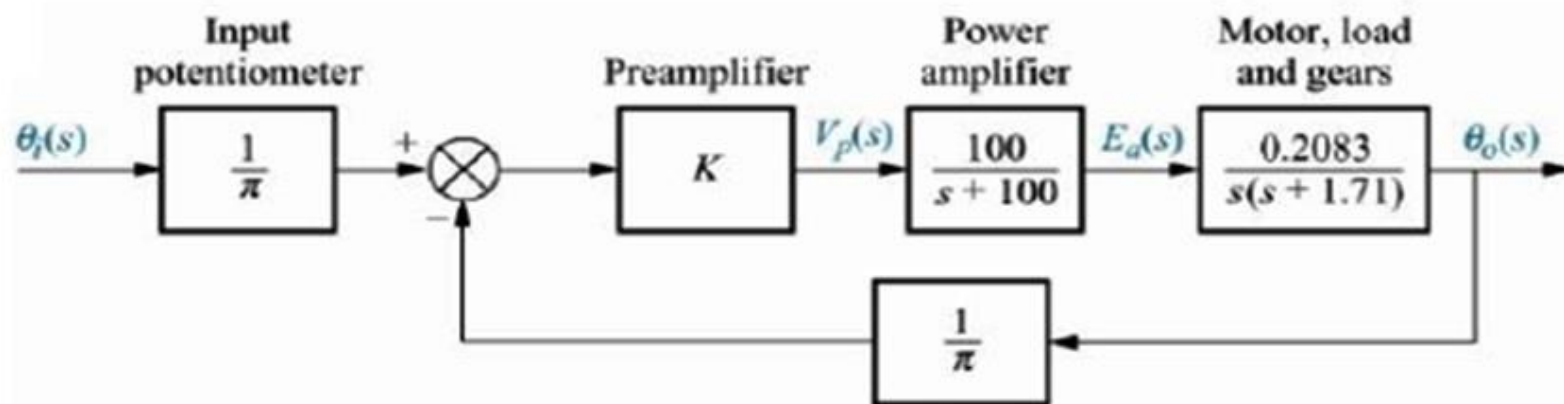
$$KD(S) = S^3 + 2KS^2 + (3K+5)S + 9K = 0$$

Sistemin kararlı olabilmesi için K değerlerinin sınırları neler olmalı?





Sistemin kararlı olabilmesi için K değerinin ne olması gerekir?



$$KD(S) = \frac{\Theta_o(S)}{\Theta_i(S)} = \frac{6.63K}{S^3 + 101.71S^2 + 171S + 6.63K}$$

|       |                |      |
|-------|----------------|------|
| $S^3$ | 1              | 1K   |
| $S^2$ | 101.71         | 6.63 |
| $S^1$ | 17392.41-6.63K | 0    |
| $S^0$ | 6.63K          | 0    |

Sistemin kararlı olabilmesi için birinci sütunun işaretlerinin pozitif (+) olması gerekir. Bunun için

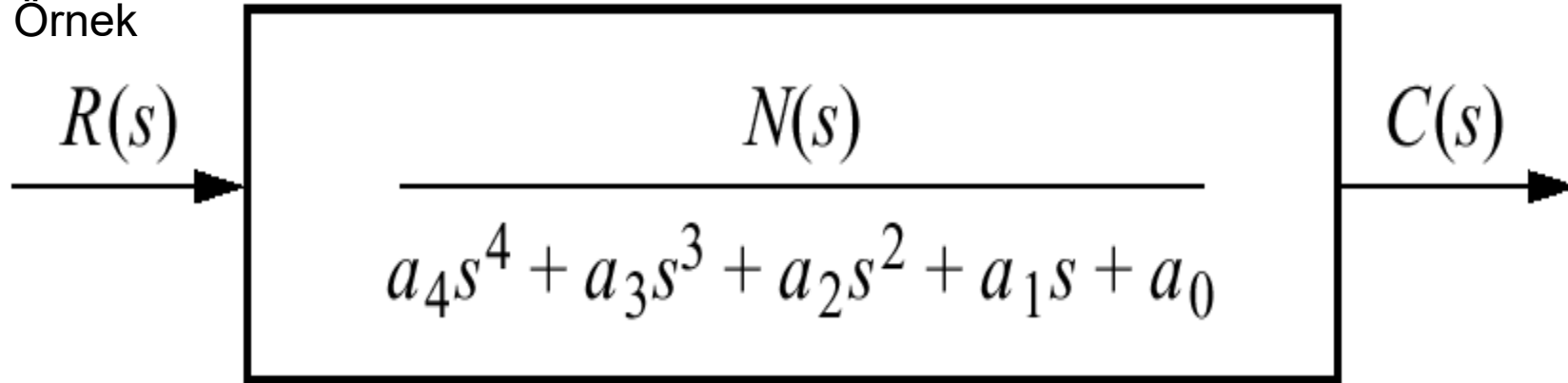
$$17392.41 - 6.63K > 0 \quad \text{denkleminde} \quad K < 2623.29 \quad \text{ve}$$

$$6.63K > 0 \quad \text{denkleminde} \quad K > 0 \quad \text{olmalı.}$$

**Yani sistemin kararlı olabilmesi için  $0 < K < 2623.29$  olmalı...**



Örnek



Kararlılık Tablosunu hazırlayınız

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $s^4$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_0$ |
| $s^3$ | $a_3$ | $a_1$ | 0     |
| $s^2$ |       |       |       |
| $s^1$ |       |       |       |
| $s^0$ |       |       |       |



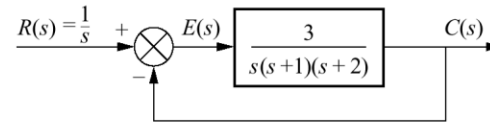
|       |                                                                           |                                                                         |                                                                     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $s^4$ | $a_4$                                                                     | $a_2$                                                                   | $a_0$                                                               |
| $s^3$ | $a_3$                                                                     | $a_1$                                                                   | 0                                                                   |
| $s^2$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$ |
| $s^1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$     | $-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$ |
| $s^0$ | $-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$   | $-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$     | $-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$ |



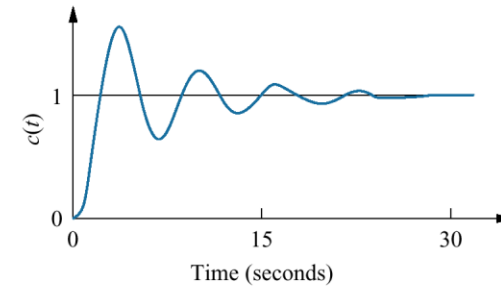
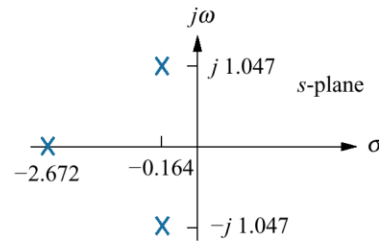
# Kapalı çevrim kutupları ve kararlılıkları

**a. Kararlı sistem;**

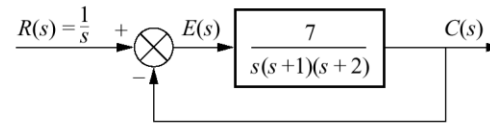
**b. Kararsız sistem**



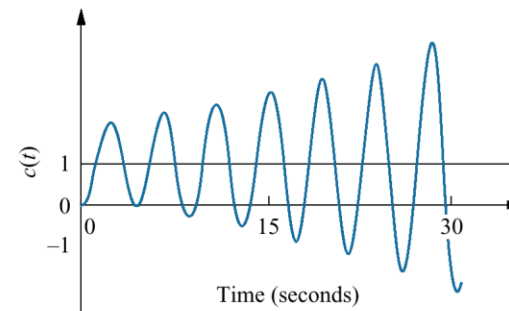
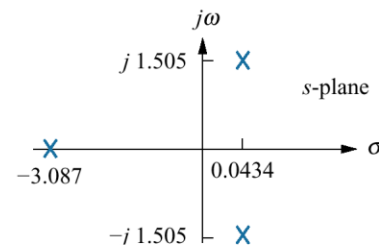
Stable system



(a)



Unstable system

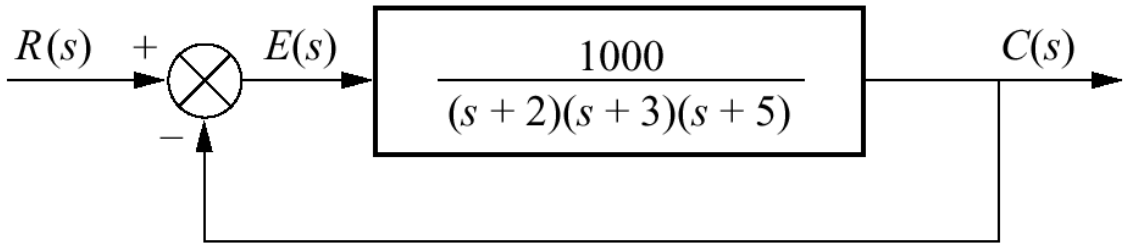


(b)



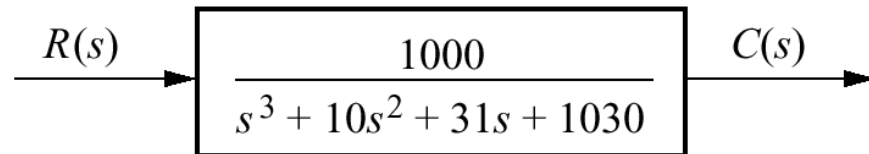
## Örnek

a. Kapalı çevrimli kontrole ait TF;



(a)

b. eşdeğer  
Kapalı çevrimli sistemin TF



(b)



# Tamamlanmış Routh kararlılık tablosu

|       |                                                                       |                                                                   |                                                                   |
|-------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $s^3$ | 1                                                                     | 31                                                                | 0                                                                 |
| $s^2$ | <del>10</del> 1                                                       | <del>1030</del> 103                                               | 0                                                                 |
| $s^1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$    | $-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$     | $-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$     |
| $s^0$ | $-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$ | $-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$ | $-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$ |



# Table 6.4

## Completed Routh table for Example 6.2

|       |                                                         |               |   |
|-------|---------------------------------------------------------|---------------|---|
| $s^5$ | 1                                                       | 3             | 5 |
| $s^4$ | 2                                                       | 6             | 3 |
| $s^3$ | $\cancel{0} \ \epsilon$                                 | $\frac{7}{2}$ | 0 |
| $s^2$ | $\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$                        | 3             | 0 |
| $s^1$ | $\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$ | 0             | 0 |
| $s^0$ | 3                                                       | 0             | 0 |



**Table 6.5**  
Determining  
signs in first  
column of a  
Routh table with  
zero as first  
element in a row

| Label | First Column                                            | $\epsilon = +$ | $\epsilon = -$ |
|-------|---------------------------------------------------------|----------------|----------------|
| $s^5$ | 1                                                       | +              | +              |
| $s^4$ | 2                                                       | +              | +              |
| $s^3$ | $\cancel{0} \epsilon$                                   | +              | -              |
| $s^2$ | $\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$                        | -              | +              |
| $s^1$ | $\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$ | +              | +              |
| $s^0$ | 3                                                       | +              | +              |



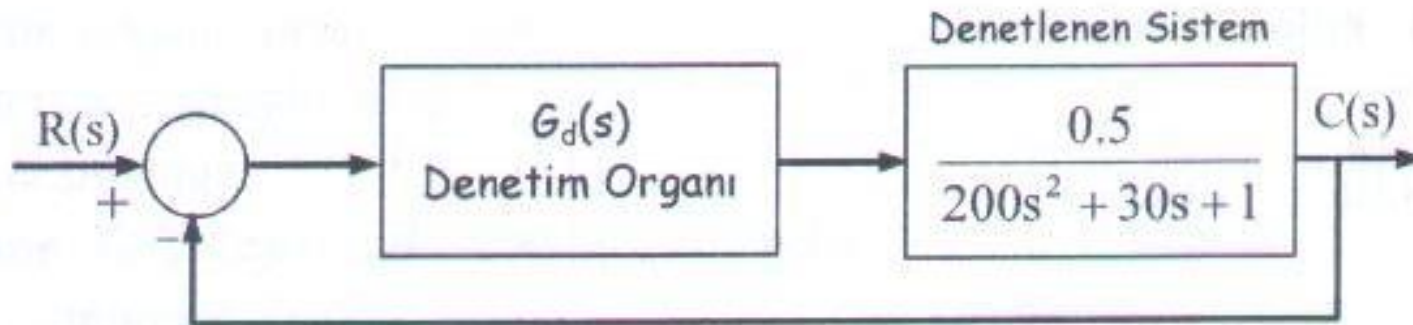
## Örnek

Aşağıda blok şeması verilen denetim sistemi

$G_d(s) = 10 + \frac{1}{4s}$  ile tanımlanan bir denetim organı ile denetlenmektedir.

a) Sistemin kararlı olup olmadığını bulunuz.

b) (a) şıkkındaki sisteme bir türev etki ilavesi halinde sistemin kararlı çalışması için türev etki zamanı ne olmalıdır.





**ÇÖZÜM:** a) Tanımlara göre sistemin transfer fonksiyonu;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\left(10 + \frac{1}{4s}\right) \left(\frac{0.5}{200s^2 + 30s + 1}\right)}{1 + \left(10 + \frac{1}{4s}\right) \left(\frac{0.5}{200s^2 + 30s + 1}\right)} = \frac{20s + 0.5}{800s^3 + 120s^2 + 24s + 0.5}$$

Sitemin öz yapısal denklemi  $800s^3 + 120s^2 + 24s + 0.5 = 0$  olduğundan Routh-Hurwitz kriterine göre, polinomun en yüksek dereceli teriminden en düşük dereceli terimine kadar bütün katsayılar sıfırdan farklı ve pozitif olduğundan gerek şartı sağlamaktadır. Ancak yeter şartı sağlayıp sağlamadığına Routh tablosu ile incelemeliyiz.

|       |       |           |                                                                                                    |                              |
|-------|-------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $s^3$ | 800   | 24        | $a_1 = \frac{120 * 24 - 800 * 0.5}{120} = 20.67$ $b_1 = \frac{20.67 * 0.5 - 120 * 0}{20.67} = 0.5$ | } sistem <b>KARARLI</b> dır. |
| $s^2$ | 120   | 0.5       |                                                                                                    |                              |
| $s^1$ | $a_1$ | $a_2 = 0$ |                                                                                                    |                              |
| $s^0$ | $b_1$ | $b_2 = 0$ |                                                                                                    |                              |



b)  $G_d(s) = 10 + \frac{1}{4s} + T_d s$  ise;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\left(10 + \frac{1}{4s} + T_d s\right) \left(\frac{0.5}{200s^2 + 30s + 1}\right)}{1 + \left(10 + \frac{1}{4s} + T_d s\right) \left(\frac{0.5}{200s^2 + 30s + 1}\right)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2T_d s^2 + 20s + 0.5}{800s^3 + (120 + 2T_d)s^2 + 24s + 0.5}$$

Gerek şart için  $120 + 2T_d > 0$  ve  $T_d > -60$  ki olmalıdır  $T_d > 0$  olduğundan bütün  $T_d$  değerleri için gerek şart sağlanır. Yeter şart için Routh tablosunu oluşturalım.



$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 800 & 24 \\ s^2 & 120 + 2T_d & 0.5 \\ s^1 & a_1 & a_2 = 0 \\ s^0 & b_1 & b_2 = 0 \end{array}$$

$$a_1 = \frac{(120 + 2T_d) * 24 - 800 * 0.5}{(120 + 2T_d)}$$

$$b_1 = \frac{a_1 * 0.5 - (120 + 2T_d) * 0}{a_1} = 0.5$$

$$a_1 > 0 \Rightarrow \frac{(120 + 2T_d) * 24 - 800 * 0.5}{(120 + 2T_d)} > 0$$

$$\Rightarrow (120 + 2T_d) * 24 - 800 * 0.5 > 0$$

$$\Rightarrow 48T_d > -2480 \Rightarrow \underline{T_d > -51.67}$$

$T_d > 0$  olduğundan bütün  $T_d$  değerleri için sistem kararlıdır.



**Örnek**

Aşağıda verilen diferansiyel denklemi sıfır başlangıç koşullarında Laplace dönüşüm yolu ile çözümünü bulunuz. Burada  $u(t)$  basamak giriş fonksiyonunu göstermektedir.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3u(t)$$

**ÇÖZÜM:** Herbir terimin sıfır başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümü alınırsa,

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) = 3 \frac{1}{s} \quad \text{elde edilir.}$$

Transfer fonksiyonu ise,  $Y(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$  olarak bulunur.



Ters Laplace dönüşümü için özyapısal denklemin kökleri bulunacak olursa,

$$s(s^2 + 2s + 5) = 0 \Rightarrow s_1 = 0, \quad s_{2,3} = -1 \mp 2j \text{ elde edilir.}$$

Transfer fonksiyonu kesirlere ayrılarak yazılacak olursa

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{K_c}{s+1-2j} + \frac{K_{-c}}{s+1+2j} \quad \text{şeklinde elde edilir.}$$

Karmaşık sayı kök çiftinin Laplace dönüşümü için

$\frac{1}{b} |K(a + bj)| e^{at} \sin(bt + \alpha)$  yazılabilir. Cevap fonksiyonunu bulmak için sabitler hesaplandığında,

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{3}{\cancel{s}(s^2 + 2s + 5)} \Rightarrow A = \frac{3}{5} = 0.6$$



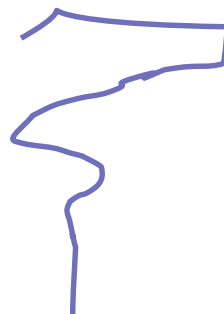
$$K(a + bj) = \lim_{s \rightarrow -1+2j} \cancel{(s^2 + 2s + 5)} \frac{3}{s \cancel{(s^2 + 2s + 5)}} = \frac{3}{-1+2j}$$

$$|K(a + bj)| = \frac{3}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = 1.34$$

$$\alpha = \arctan \frac{0}{3} - \arctan \frac{2}{-1} = -116.56^\circ = -116.56^\circ * \frac{\pi}{180} = -2.03 \text{ rad} \quad \text{elde edilir.}$$

Bulunan bu değerler yerine konduğunda fonksiyonun zaman alanı cevabı için

$$y(t) = 0.6 u(t) - 0.67 e^{-t} \sin(2t - 2.03)$$



**Örnek**

Aşağıda verilen diferansiyel denklemi sıfır başlangıç koşullarında Laplace dönüşümü yolu ile çözümünü bulunuz.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \cos 2t$$

**ÇÖZÜM:** Sıfır başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümü yapıldığında,

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} \quad \text{elde edilir.}$$

Transfer fonksiyonunu bulmak için düzenlediğimizde,

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 4)} \quad \text{elde ederiz.}$$

Özyapısal denklemin kökleri,

$$s_1 = 2i, s_2 = -2i, s_3 = -1+2i, s_4 = -1-2i, \quad \text{olarak bulunur.}$$



Transfer fonksiyonunu kesirlere ayrılmış şekilde yazdığımızda

$$Y(s) = \frac{K_{c1}}{s-2j} + \frac{K_{-c1}}{s+2j} + \frac{K_{c2}}{s+1-2j} + \frac{K_{-c2}}{s+1+2j} \quad \text{olarak elde ederiz.}$$

Karmaşık sayı kök çiftinin Laplace dönüşümü için

$$\frac{1}{b} |K(a + bj)| e^{at} \sin(bt + \alpha) \text{ yazılabilir. Burada,}$$

$$K_1(a + bj) = \lim_{s \rightarrow 2j} \cancel{(s^2 + 4)} \frac{s}{(s^2 + 2s + 5)\cancel{(s^2 + 4)}} = \frac{2j}{1 + 4j}$$

$$|K_1(a + bj)| = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}} = 0.485$$



$$K_2(a + bj) = \lim_{s \rightarrow -1+2j} \frac{s}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 4)} = \frac{-1+2j}{1-4j}$$

$$|K_2(a + bi)| = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}} = 0.542$$

Faz açıları,

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{2}{0}\right) - \arctan\left(\frac{4}{1}\right) = 90 - 76 = 14^\circ \quad \alpha_1 = 14 \frac{\pi}{180} = 0.245 \text{ rad}$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) - \arctan\left(\frac{-4}{1}\right) = 116.56 - 284 = -167.43^\circ$$

$$\alpha_2 = -167.43 \frac{\pi}{180} = -2.92 \text{ rad} \quad \text{bulunur.}$$

Bulunan bu değerler yerine konduğunda fonksiyonun zaman alanı cevabı için



$$y(t) = \frac{1}{b_1} |K_1(a + bi)| e^{a_1 t} \sin(b_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{b_2} |K_2(a + bi)| e^{a_2 t} \sin(b_2 t + \alpha_2)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} 0.485 e^{0t} \sin(2t + 0.245) + \frac{1}{2} 0.542 e^{-t} \sin(4t - 2.92)$$

$$y(t) = 0.2425 \sin(2t + 0.245) + 0.271 e^{-t} \sin(4t - 2.92)$$





# Transfer Fonksiyonu Modellerinin MATLAB ile Analizi

- $s^3 + 3s^2 + 4$  polinomunun kökleri *roots* komutu ile bulunur.

Sonuçlar;

$r =$

-3.3553

$0.1777 + 1.0773i$

$0.1777 - 1.0773i$

A screenshot of the MATLAB Editor window. The title bar reads "Editor - D:\MATLAB7\work\OtomatikKontrol\PolinomKok.m\*". The menu bar includes File, Edit, Text, Cell, Tools, Debug, Desktop, Window, and Help. The toolbar contains various icons for file operations, editing, and execution. The script area shows two lines of code: "1 - p=[1 3 0 4]" and "2 - r=roots(p)". The status bar at the bottom indicates "script", "Ln 2", "Col 11", and "OVR".

```
Editor - D:\MATLAB7\work\OtomatikKontrol\PolinomKok.m*
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons]
1 - p=[1 3 0 4]
2 - r=roots(p)
script Ln 2 Col 11 OVR
```



- Sistem transfer fonksiyonu *tf* komutu ile bulunur;

Transfer fonksiyonu payı paydaya bölme, sonucu bölüm ve kalan olarak yazma işlemi değildir. Bir sistemin giriş/çıkış bağıntısını modelleyen sembolik bir gösterim biçimidir.

Sonuçlar ;

Transfer function:

10

-----  
s<sup>2</sup> + 2 s + 5

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 5}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Transfer function:

10

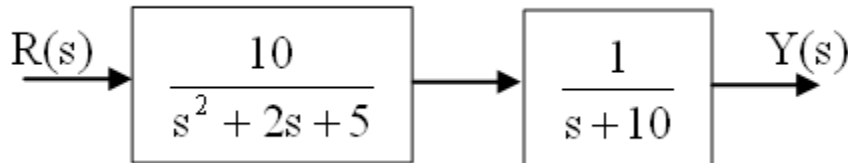
-----  
s + 1

```

Editor - D:\MATLAB7\work\OtomatikKontrol\TransferFonksiyonu.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 - Pay1=[10];Payda1=[1 2 5]; G1=tf(Pay1,Payda1)
2 - Pay2=[1];Payda1=[1 1]; G2=tf(Pay1,Payda1)
script Ln 3 Col 1 OVR
  
```



- Art arda seri bağlı iki sistemin transfer fonksiyonlarının indirgenmesi, *series* komutuyla ya da “\*” çarpım operatörüyle yapılır.



```
Editor - D:\MATLAB7\work\OtomatikKontrol\Bolum1\SeriBagliSisteminEsdegeri...
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons]
1 - Pay1=[10]; Payda1=[1 2 5]; Sistem1=tf(Pay1,Payda1);
2 - Pay2=[1]; Payda2=[1 1]; Sistem2=tf(Pay2,Payda2);
3 - Sistem=Sistem1*Sistem2
4 - %veya
5 - Sistem=Series(Sistem1,Sistem2)
TransferFonksiyon... x SeriBagliSisteminEs... x
script Ln 6 Col 1 OVR
```

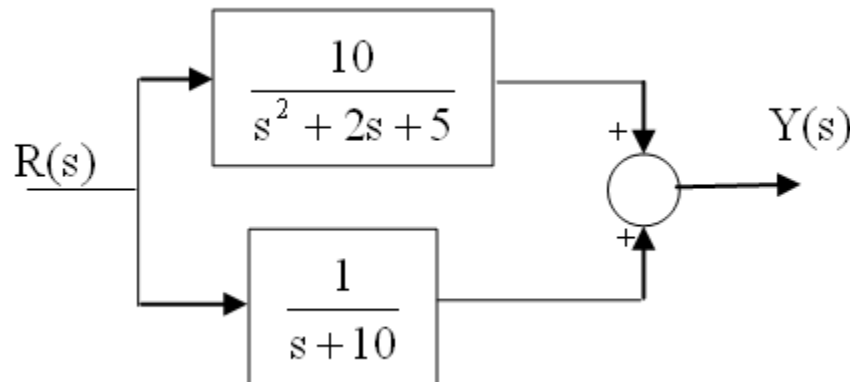
Sonuç;  
Transfer function:  
10

---

$$s^3 + 3s^2 + 7s + 5$$



- Paralel bağlı iki sistem bloğunun indirgenmesi *parallel* komutu ya da “+” toplama operatörüyle yapılır.



```

Editor - D:\MATLAB7\work\OtomatikKontrol\Bolum1\ParalelBagliSisteminEsde...
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons]
1 - Pay1=[10]; Payda1=[1 2 5]; Sistem1=tf(Pay1,Payda1);
2 - Pay2=[1]; Payda2=[1 1]; Sistem2=tf(Pay2,Payda2);
3 - Sistem=Sistem1+Sistem2
4 - %veya
5 - Sistem=Parallel(Sistem1,Sistem2)

TransferFonksiyon... x ParalelBagliSistemin... x
script Ln 5 Col 1 OVR

```

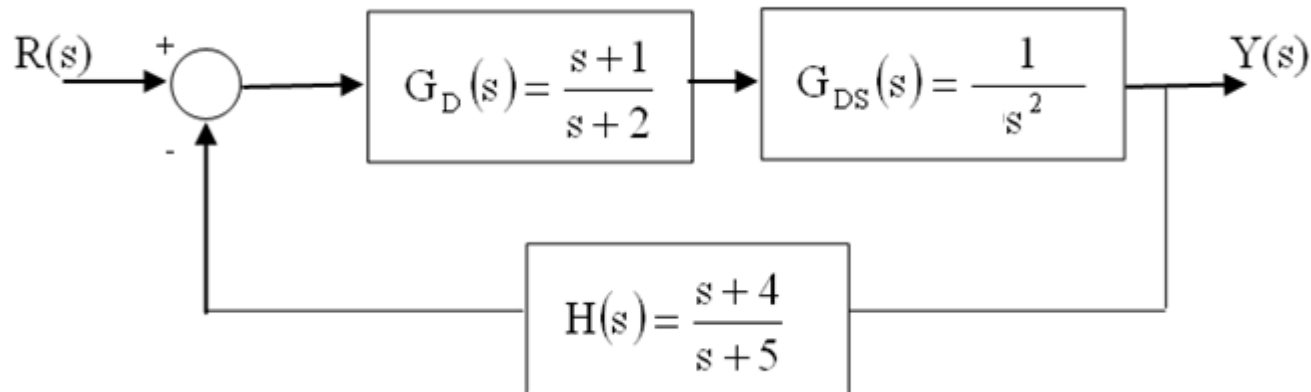
Sonuç;

Transfer function:

$$\frac{s^2 + 12s + 15}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$$



- Geri bildirim döngüsünün indirgenmesi *feedback* komutu ile yapılır.  $T = \text{feedback}(G, H, \text{işaret})$ ; burada *işaret*, geri bildirim negatif ise -1, pozitif ise +1'dir. *işaret belirtilmediği takdirde negatif geri bildirime göre hesaplama yapılır.*



Yukarıdaki gibi bir sistemde ileri yol  $G(s) = G_D(s) * G_{DS}(s)$ , geri bildirim  $H(s)$ , geri bildirimli sistemin transfer fonksiyonu  $T(s)$ 'dir.



```

Editor - D:\MATLAB7\work\OtomatikKontrol\Bolum1\GeriBildirim.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons] B...
1 - PayGD=[1 1]; PaydaGD=[1 2]; GD=tf(PayGD, PaydaGD);
2 - PayGDS=[1]; PaydaGDS=[1 0 0]; GDS=tf(PayGDS, PaydaGDS)
3 - G=series(GD, GDS)
4 - PayH=[1 4]; PaydaH=[1 5]; H=tf(PayH, PaydaH)
5 - T=feedback(G, H)
script Ln 3 Col 17 OVR
  
```

Sonuçlar;

Transfer function:  $G = \frac{s + 4}{s + 5}$

Kodu göster

MatLab

Transfer function:  $T = \frac{s^2 + 6s + 5}{s^4 + 7s^3 + 11s^2 + 5s + 4}$



- Bir sistemin kutupları ve sıfırları sırasıyla *pole* ve *zero* komutlarıyla bulunur. Kutup ve sıfırları s karmaşık düzleminde çizdirmek için ise *pzmap* komutu kullanılır.

$$G(s) = \frac{6s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

```

Editor - D:\MATLAB7\work\OtomatikKontrol\Bolum1\KutupSifirBulma.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons] [B...] >>
1 - Pay=[6 0 1];Payda=[1 3 3 1]; G=tf(Pay,Payda);
2 - sifirlar=zero(G)
3 - kutuplar=pole(G)
4 - pzmap(G)
script Ln 4 Col 9 OVR

```

Sonuçlar;

sifirlar =

0 + 0.4082i

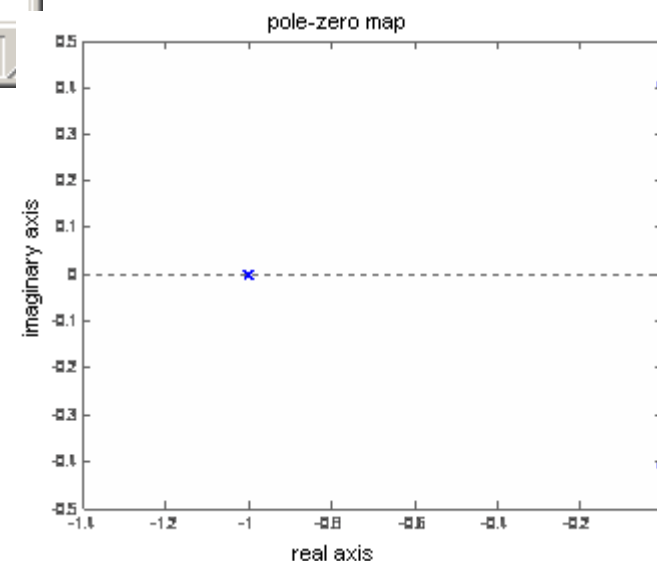
0 - 0.4082i

kutuplar =

-1.0000

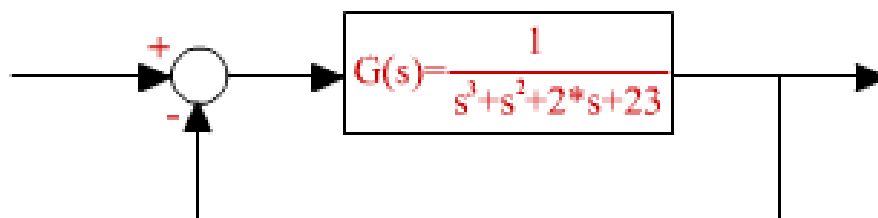
-1.0000

-1.0000





*roots* komutunun kullanımı için aşağıdaki örneğimizi inceleyelim.



Yukarıda verilen kapalı-döngü kontrol sistemine ait transfer fonksiyonunu ve karakteristik denklemini daha önceki bilgilerimize dayanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$T.F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 2*s + 24}$$

$$K.D (s) = s^3 + s^2 + 2*s + 24$$

Yandaki tabloda da görüldüğü gibi birinci kolondaki sayıların sıralanışında iki defa işaret değişimi gerçekleşmiştir. Bundan dolayı örneğimizdeki sistem *kararsızdır* denir.

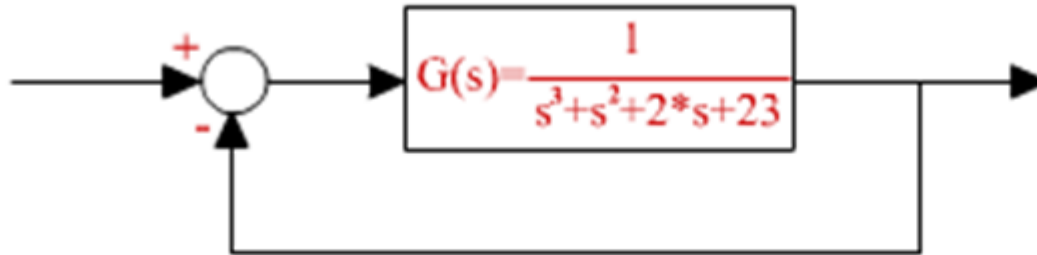
| $s^3$ | 1   | 2  |
|-------|-----|----|
| $s^2$ | 1   | 24 |
| $s^1$ | -22 | 0  |
| $s^0$ | +24 | 0  |

1. işaret değişimi

2. işaret değişimi



## *roots* komutunun kullanımı



$$T.F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 2*s + 23}$$

```
payg = [1] ;
paydag = [1 1 2 23] ;
[pay,payda] = cloop (payg,paydag,-1) ;
roots (payda)
```

ans =

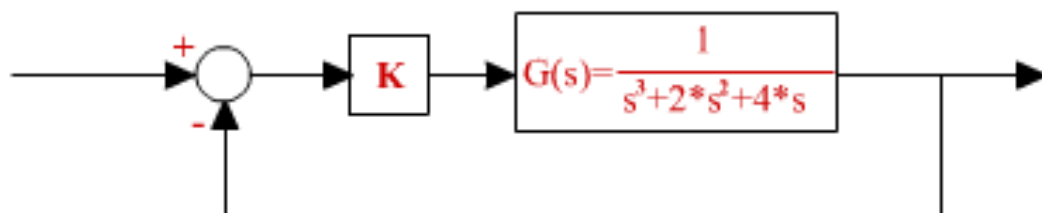
-3.0000

1.0000 + 2.6458i

1.0000 - 2.6458i > kararsız kökler



## plot komutunun kullanımı



$$T.F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 2*s + 24}$$

$$K.D(s) = s^3 + 2*s^2 + 4*s + K$$

### Sistemin Matlab Ugulaması

```
K=[0:0.5:20];
n=length(K);
for i=1:n;
q=[1 2 4 K(i)];
p(:,i)=roots(q);
end
```

Yukarıdaki sistemin matlab programı **K'nın 0 ile 20** arasında **0.5** adımlarla değiştiğinde ortaya çıkacak olan sisteme ait köklerin yerini çizer.

```
plot(real(p),imag(p),'x')
grid
xlabel('Gerçek eksen')
ylabel('Sanal eksen')
```



# Bitti...