

Bölüm 10: Katı Cismin Sabit bir Eksen Etrafında Dönmesi

Kavrama Soruları

- 1- Bir nokta etrafında dönmekte olan cismin hareketini tanımlamak için nasıl bir yer değiştirme tanımlarsınız?
- 2- Açısal hızın yönü varmıdır, veya açısal hız vektörel bir nicelikmi dir?
- 3- Dönme olayında cismin kütesini direk olarak kullanabilirmiyiz?
- 4- Aynı yükseklikten bırakılan bir cisim kayarak mı yoksa yuvarlanarak mı daha çabuk aşağıya iner?

Sunuş

10-1 Açısal Yer Değiştirme, Hız ve İvme

10-2 Dönme Kinematığı

10-3 Açısal ve Doğrusal Nicelikler

10-4 Dönme Enerjisi

10-5 Tork

10-6 Tork ve Açısal İvme Bağlantısı

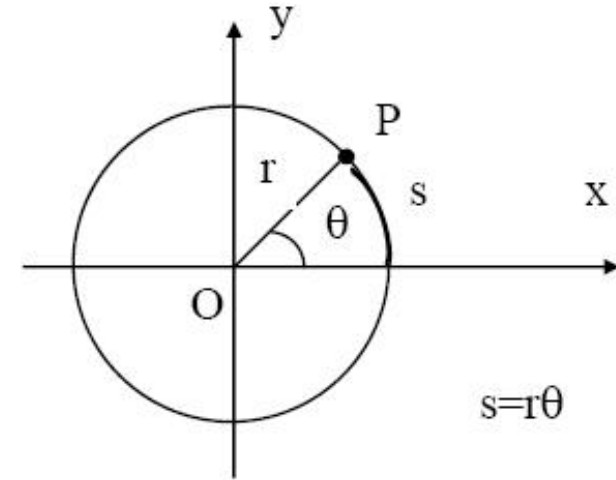
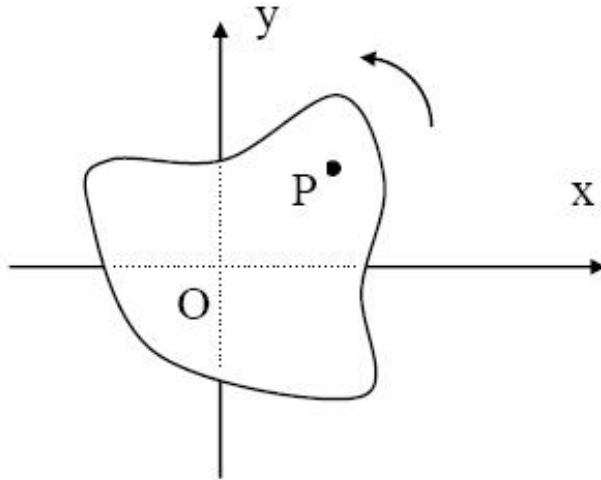
Sunuş

Bu bölümde, önce sabit bir eksen etrafında dönen katı bir cismin açısal yer değiştirme, açısal hız ve açısal ivme nicelikleri türetilcek ve dönme hareketi ile açısal hareket arasındaki ilişki ve benzerlikler elde edilecektir. Daha sonra dönme hareketi yapan katı bir cismin dönme kinetik enerji ifadesi türetilcektir. Bir kuvvetin bir cisim bir nokta etrafında döndürme etkisinin ifadesi olan tork kavramı tanımlanacak. İki vektörün vektörel çarpımı tanımlanarak tork kavramı kuvvet ve uzunluk vektörleri ile vektörel çarpım olarak ifade edilecektir. Son olarak da bir kuvvetin döndürme etkisi ile açısal ivme arasında nasıl bir ilişki olduğu incelenerek Newton'un 2. kanununun dönü hareketi için ifadesi elde edilecektir.

10.1 Açısal Yer Değiştirme, Hız ve İvme

Dönme olayını inceleyebilmek için öncelikle dönme hareketini en iyi tanımlayacak yerdeğiştirme niceliğini tanımlamamız gerekecektir. Bu yer değiştirmeyi tanımladıktan sonra doğrusal harekette tanımladığımız gibi yer değiştirmenin zamana göre değişimine bakarak bu dönen cismin dönüş hızını (açısal hız), dönüş hızının birim zamandaki değişiminden de dönüş hızındaki değişimleri gösteren dönüş ivmesi (açısal ivme) kavramlarını türetebiliriz.

Aşağıdaki gibi, O noktası etrafında dönebilen herhangi bir şekle sahip katı bir cismi göz önüne alalım. Bu cismin üzerinde tanımladığımız bir P noktasının hareketini inceleyelim.



Sabit O merkezi etrafında r yarıçaplı P noktasının aldığı yol;

$$s=r\theta$$

θ 'nın birimi radyan (rad)'dır. Bir radyan, yarıçapla eşit uzunluktaki bir yay parçasının yarıçapa oranı ile elde edilen açıdır.

$$s=r\theta \text{ (1 radyan)}$$

Radyan açı ölçüsü ile derece açı ölçüsü arasındaki ilişki

$$\theta(\text{rad}) = (\pi/180^\circ) \cdot \theta(\text{derece})$$

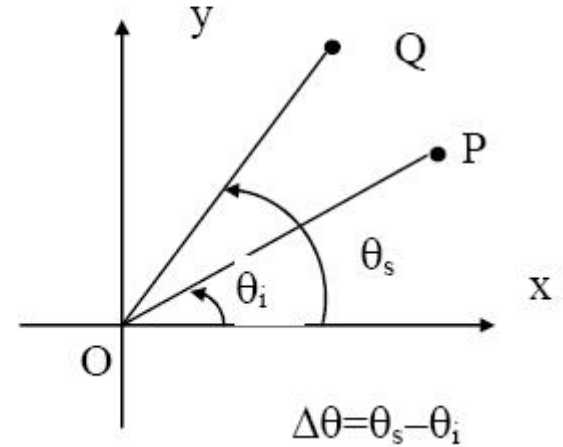
Açısal Yer değiştirme:

r yarıçaplı P noktasının Δt zaman sonra Q noktasına geldiğini düşünürsek P noktasının açısal yer değiştirmesi:

$$\Delta\theta = \theta_s - \theta_i$$

şeklinde yazılır.

Açısal yer değiştirmenin boyutu yoktur!, birimi ise radyandır!



Ortalama Açısal Hız ($\bar{\omega}$):

Ortalama açısal hız ($\bar{\omega}$), Δt zaman aralığındaki açısal yer değiştirmenin($\Delta\theta$), Δt zamanına oranıdır.

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_s - \theta_i}{\Delta t}$$

Ani Açısal hız (ω):

Ani açısal hız (ω), Δt zamanı limit durumunda sıfıra gittiğinde ($\Delta t \rightarrow 0$) açısal yer değiştirmenin ($\Delta\theta$), zamana oranıdır.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

θ açısı boyutsuz olduğundan açısal hızın boyutu $[\omega]=1/[T]$ 'dir. Birimi ise radyan/saniye (rad/s) veya s^{-1} dir. Açısal hız vektörel bir niceliktir öyle ki yönü aşağıdaki gibi belirlenir.

Açısal hızın yönü:

Dönme açısı artarsa(saat ibresinin tersi yönündeki hareket) ω pozitif

Dönme açısı artarsa(saat ibresi ile aynı yöndeki hareket) ω negatiftir.

Ortalama açısal ivme ($\bar{\alpha}$):

Ortalama açısal ivme($\bar{\alpha}$), Δt zaman aralığındaki açısal hızdaki değişme miktarının ($\Delta\omega$) geçen zamana oranıdır.

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_s - \omega_i}{\Delta t}$$

Ani açısal ivme (α):

Ani açısal ivme (α), Δt zaman aralığı limit durumunda sıfıra gittiğinde ($\Delta t \rightarrow 0$) açısal hızın ($\Delta\omega$) zamana oranıdır.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

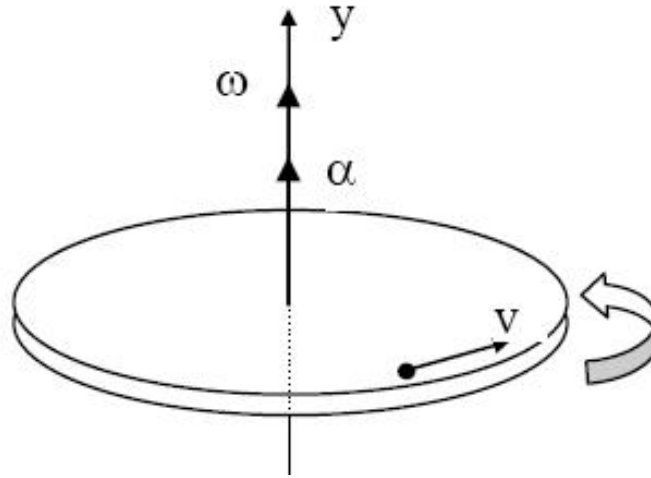
θ açısı boyutsuz olduğundan açısal ivmenin boyutu $[\alpha]=1/[T^2]$ 'dir. Birimi ise radyan/saniye² (rad/s²) veya s⁻² dir.

Açısal ivmenin yönü:

Dönme açısı artarsa(saat ibresinin tersi yönündeki hareket) α pozitif

Dönme açısı artarsa(saat ibresin ile aynı yönündeki hareket) α negatif dir.

v, ω ve α 'nın yönleri:



v çizgisel hız yörüngeye teğettir.

ω dönme eksenini üzerindedir

Saat yönünün tersi yönde ise ω , $+y$;

Saat yönünü ile aynı yönde ise ω , $-y$;

α (açısal ivme), ω ile aynı yönlüdür.

Açısal hız vektörünün yönünü belirlemek için “sağ el kuralı”: Açısal hızın yönünü bulmak için sağ elimizi kullanarak açısal hızın yönünü kolayca bulabiliriz. Bu kuralda sağ elin baş parmak dışındaki dört parmağı birleştirilip kıvrılarak dönen cismin dönüş yönü ile çakıştırılır. Baş parmak bu dört parmağa dik tutulur ve baş parmağın gösterdiği yön açısal hızın yönüdür.

Doğrusal ve açısal hareketi tanımlamada kullanılan nicelikleri karşılıklı olarak yazarsak:

<u>Açısal</u>	<u>Doğrusal</u>	
θ	x	(yerdeğiştirme)
ω	v	(hız)
α	a	(ivme)

10-2 Dönme Kinematığı: Sabit Açısal İvmeli Dönme Hareketi

Daha önce doğrusal hareket için türettiğimiz kinematik eşitlikleri dönme hareketine uyarlayabiliriz. Doğrusal harekette türettiğimiz formüllere dönü hareketini tanımlayan x , v ve a yerine açısal yerdeğiştirme($\Delta\theta$), açısal hız(ω) ve açısal ivme(α) niceliklerini yazarsak:

Sabit ivmeli doğrusal hareket

$$v_s = v_o + at$$

$$x_s = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_s^2 = v_o^2 + 2ax$$

Sabit açısal ivmeli dönme hareketi

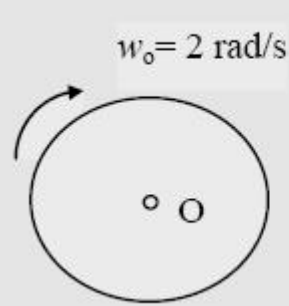
$$\omega_s = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta_s = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega_s^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$$

elde ederiz..

Örnek 10.1 *Dönen Teker:* Bir tekerlek, 3,5 rad/s²'lik sabit açısal ivme ile dönüyor. $t=0$ s'de tekerleğin açısal hızı 2 rad/s ise;
 a) 2 saniyede teker ne kadarlık açı süpürür?
 b) $t=2$ s sonra açısal hızı nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{a) } \theta_s &= \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ &= (2 \text{ rad/s}) \cdot (2 \text{ s}) + \frac{1}{2} (3,5 \text{ rad/s}^2) \cdot (2 \text{ s})^2 = 11 \text{ rad} = 630^\circ \\ \text{Devir sayısı} &= \Delta\theta / 360^\circ \text{ (derece/dev)} = 1,75 \text{ devir} \\ \text{b) } \omega_s &= \omega_o + \alpha t \\ &= (2 \text{ rad/s}) + (3,5 \text{ rad/s}^2) \cdot (2 \text{ s}) = 9 \text{ rad/s bulunur..} \end{aligned}$$

10-3 Açısal ve Doğrusal Nicelikler

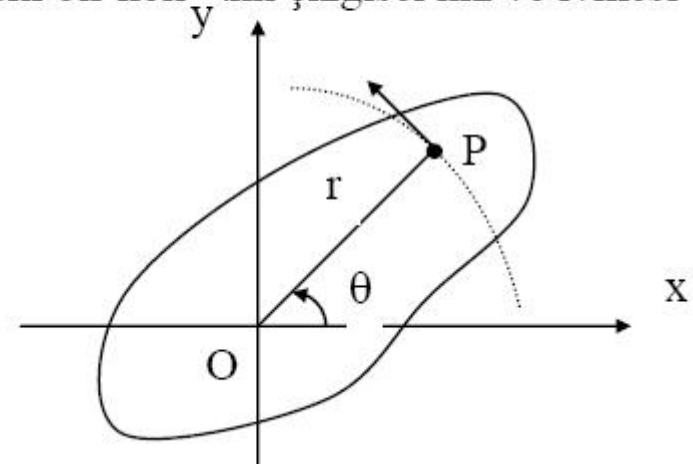
Dönen bir cismin açısal hız ve ivmesi ile cismin üzerindeki bir noktanın çizgisel hız ve ivmesi arasında nasıl bir bağlantı vardır?

$$s = r\theta \quad r = \text{sabit}$$

$$\text{Teğetsel hız: } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$v = r\omega$$

$$\text{Teğetsel ivme: } a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$



Daha önce dairesel yörüngede dönen bir noktanın merkeze yönelik v^2/r büyüklüğünde $\mathbf{a}_r$ merkezci ivme ile hareket ettiğini görmüştük. $\mathbf{a}_r$ ivmesini ω açısal hız cinsinden yazarsak:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

Dönen bir katı cisim üzerinde hareket eden bir noktanın toplam ivmesi:

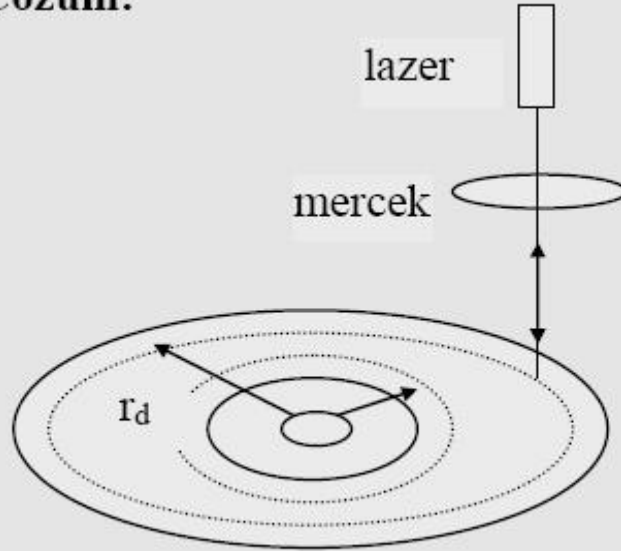
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$$

Bu ivmenin büyüklüğü: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2 \alpha^2 + r^2 \omega^4} = r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

$$a = r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Örnek 10.2 *CD Çalar:* Tipik bir CD plağında disk saatin tersi yönünde döner ve lazer-mercek sistemi noktasında yüzeyin sabit hızı 1,3 m/s dir. CD'nin iç yarıçapı $r_i=23$ mm ve dış yarıçap $r_d=58$ mm'dir.

- Disk in açısal hızını devir başına dakika olarak iç ve dış noktada bulunuz.
- Standart bir CD'nin maksimum çalma süresi 74 dakika 33 saniyedir. Bu sürede disk kaç devir yapar?

Çözüm:

a) En içteki iz için açısal hız

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1,3m/s}{2,3 \times 10^{-2}m} = 56,5 rad/s$$

$$\omega_i = (56,5 rad/s) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} dev/rad\right) \cdot (60s/dak)$$

$$= 5,4 \times 10^2 devir/dak$$

En dıştaki iz için açısal hız

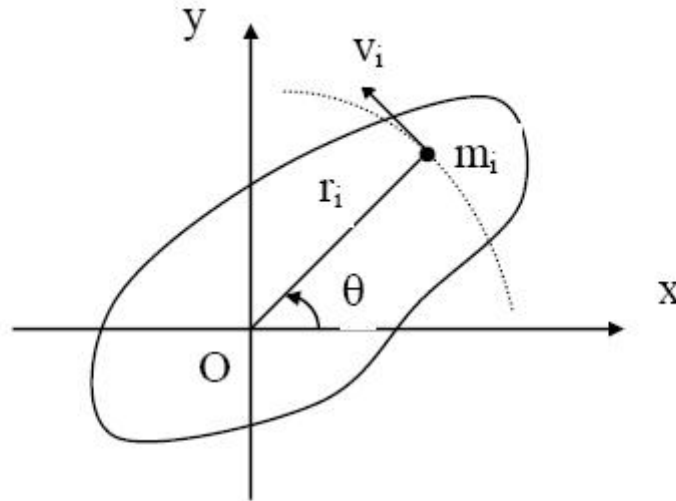
$$\omega_d = \frac{v}{r_d} = \frac{1,3m/s}{5,8 \times 10^{-2}m} = 22,4 rad/s$$

$$\omega_d = 2,1 \times 10^2 devir/dakika$$

b) $t = (74dak) \cdot (60 s/dak) + 33s = 4473$ saniyeİlk açısal konum $\theta_i = 0^\circ$, $\theta_s = ?$ Ortalama açısal hız $= (\omega_i + \omega_s)/2s$ $\theta_s = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_s)t = 0 + (540dev/dak + 210dev/dak) \cdot (1760dak/s) \cdot (4473s) = 2,8 \times 10^4$ devir bulunur

10-4 Dönme Enerjisi

O eksenini etrafında dönen katı cismin kinetik enerjisini bulmaya çalışalım. Katı cismin m_i gibi küçük parçacıklardan oluştuğunu ve O eksenini etrafında sabit ω açısal hızı ile döndüğünü kabul edelim.



m_i . parçacığın teğetsel hızı v_i ise kinetik enerjisi K_i

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Toplam kinetik enerji K_T

$$K_T = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega_i^2$$

ω_i her nokta için aynı olduğundan

$$K_T = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$$

$$K_T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$I = \sum m_i r_i^2$ ifadesine dönme eylemsizlik momenti denir.

Dönme eylemsizlik momenti I , doğrusal hareketteki m kütesine özdeştir.

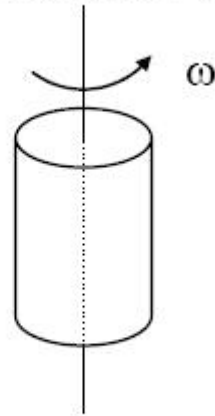
Dönme

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

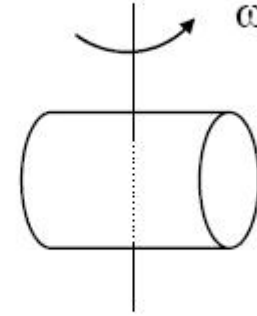
Doğrusal Hareket

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

I eylemsizlik momenti, cismin hangi eksen etrafında döndürüldüğüne bağlıdır.



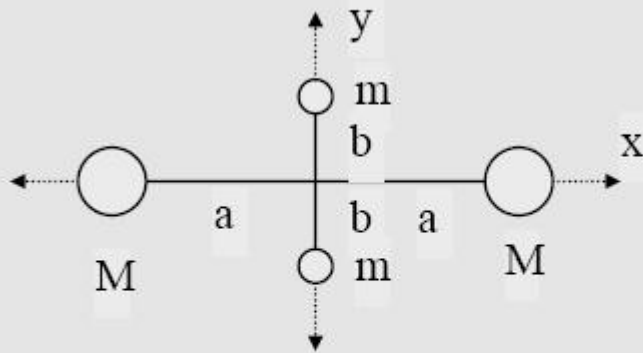
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



$$I = MR^2$$

Örnek 10.4 *Dönen Dörtlü Parçacık:* Dört küçük küresel kütle, xy düzleminde kütlesi ihmal edilebilen bir çerçevenin köşelerine yerleştirilmiştir. Kürelerin yarıçaplarının çerçevenin boyutlarına kıyasla çok küçük olduğu varsayılıyor.

- Sistem, ω açısal hızı ile y eksenini etrafında dönerse bu eksene göre eylemsizlik momentini ve dönme kinetik enerjisini bulunuz.
- Sistemin O 'dan geçen bir eksen (z -ekseni) etrafında xy düzleminde döndüğünü varsayalım. Z eksenine göre eylemsizlik momentini ve dönme kinetik enerjisini bulunuz.

Çözüm:

$$\text{a) } I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$K_{Dy} = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2) \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$

b)

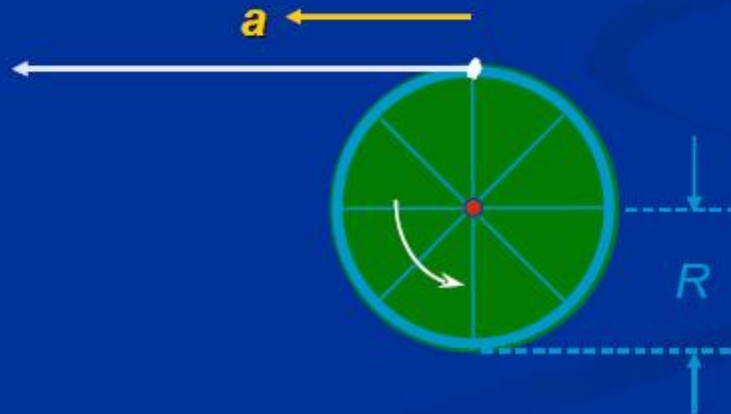
$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_{Dz} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2 + 2mb^2) \omega^2 = (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

$$K_{Dz} = K_{Dy} + K_{Dx}$$

Örnek: Tekerlek ve Sicim

- Yarıçapı $R = 0.4 \text{ m}$ olan bir tekerlek sabit bir eksen etrafında serbestçe dönmektedir. Tekerleğin etrafında sarılan bir ip var. $t = 0$ anında durgunken ip sabit bir ivme $a = 4 \text{ m/s}^2$ ile çekilir. 10 saniye sonra tekerlek kaç tur döner? (Bir tur = 2π radyan)



Tekerlek ve Sicim...

Çizgisel denklemlerle:

$$\text{tur} = \frac{\text{Yol}}{2\pi R} = \frac{\frac{1}{2}at^2}{2\pi R} \Rightarrow \text{tur} = \frac{\frac{a}{2R}t^2}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi}$$

dönme denklemleri ile

$$\text{tur} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi}$$

$$a/R$$

nümerik:

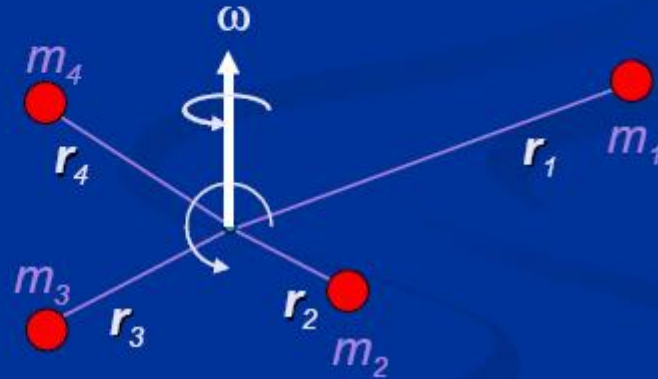
$$\text{tur} = \frac{\frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi} = \frac{0.5 \cdot \frac{4}{0.4} 10^2}{2 \cdot 3.14} = \frac{500}{6.28} \approx 80$$

a



Rotasyon & Kinetik Enerji

- Aşağıda gösterilen basit dönen bir sistemi dikkate alalım. (Noktasal kütleler kütsesiz bir çubuğa ilıştırılı)
- Sistemin kinetik enerjisi her bir parçacığın kinetik enerjisinin toplamıdır:



Rotasyon & Kinetik Enerji...

■ Yani:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{ama} \quad v_i = \omega r_i$$

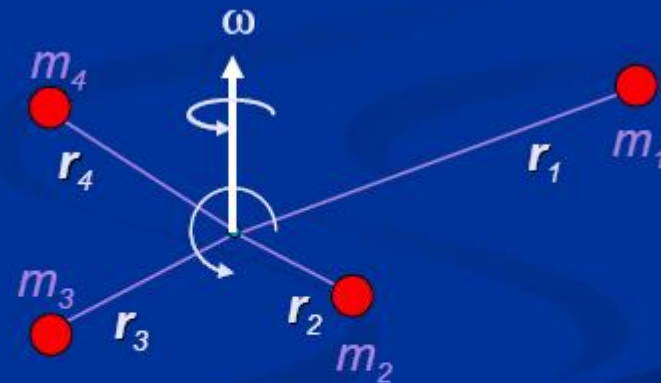
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

Başka bir şekilde yazım:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Dönme eksenini etrafında
eylemsizlik momenti



I nın birimi $kg \ m^2$.

Rotasyon & Kinetik Enerji...

- Dönen bir sistemin kinetik enerjisi nokta parçacığın kinetik enerjisine benziyor:

Nokta parçacık	Dönen sistem
$K = \frac{1}{2}mv^2$ $v \rightarrow$ "lineer" hız $m \rightarrow$ kütle.	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$ $\omega \rightarrow$ açısal hız I dönme eksenini etrafında eylemsizlik momenti. $I = \sum_i m_i r_i^2$

Eylemsizlik Momenti

sonuç

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

burada

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

- Eylemsizlik momenti I sistemin kütle dağılımına bağlıdır.
 - Kütlenin dönme ekseninden uzaklaşması eylemsizlik momentini artırır.
- Verilen bir cisim için eylemsizlik momenti dönme eksenini nerde seçtiğimize bağlıdır. (kütle merkezinden farklı).
- Lineer dinamikteki denklemlerde m kütlenin yerini dönme dinamiğinde I eylemsizlik momenti alır!

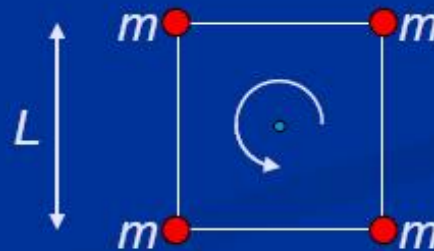
Eylemsizlik Momenti Hesabı

- Sabit bir eksen etrafında dağılmış N ayrık noktasal parçacık için eylemsizlik momenti:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

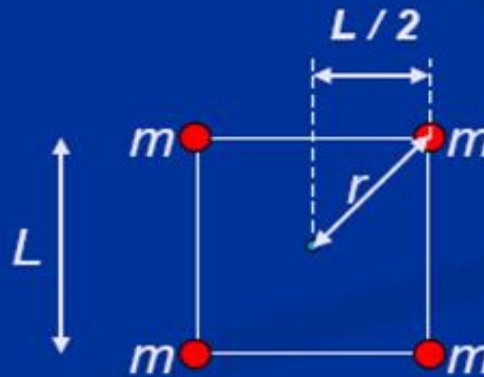
burada r kütlenin dönme eksenine olan uzaklığı.

Örnek: Kenar uzunluğu L olan bir karenin köşelerinde 4 (m) kütlesi var ve kare merkezinden geçen bir eksen etrafında dönmektedir. Kütle sisteminin eylemsizlik momentini hesaplayınız:



Eylemsizlik Momenti Hesabı...

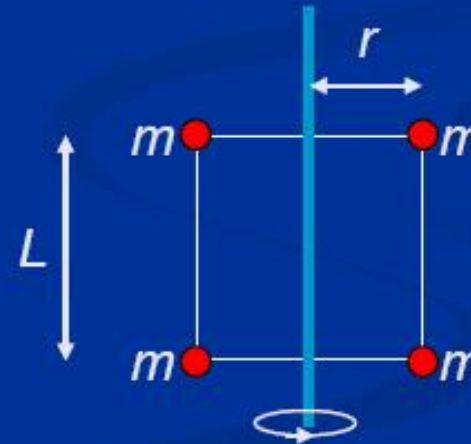
$$I = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 = 4 \cdot m \cdot \left(\frac{L}{2} \sqrt{2} \right)^2 \Rightarrow I = 2mL^2$$



Eylemsizlik Momenti Hesabı...

- I 'yı şimdide merkezden kenara paralel olan bir dönme eksenini için hesaplayalım:

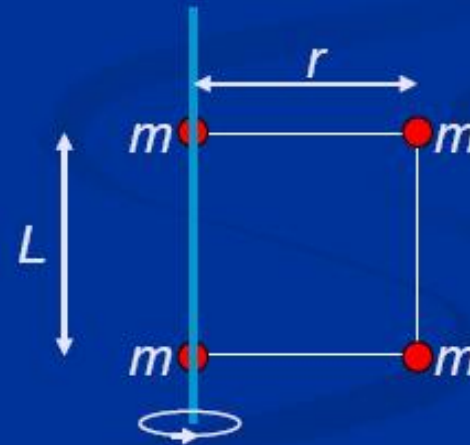
$$\begin{aligned} I &= \sum m r^2 \\ &= m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \times 4 \\ &= \boxed{m L^2} \end{aligned}$$



Eylemsizlik Momenti Hesabı...

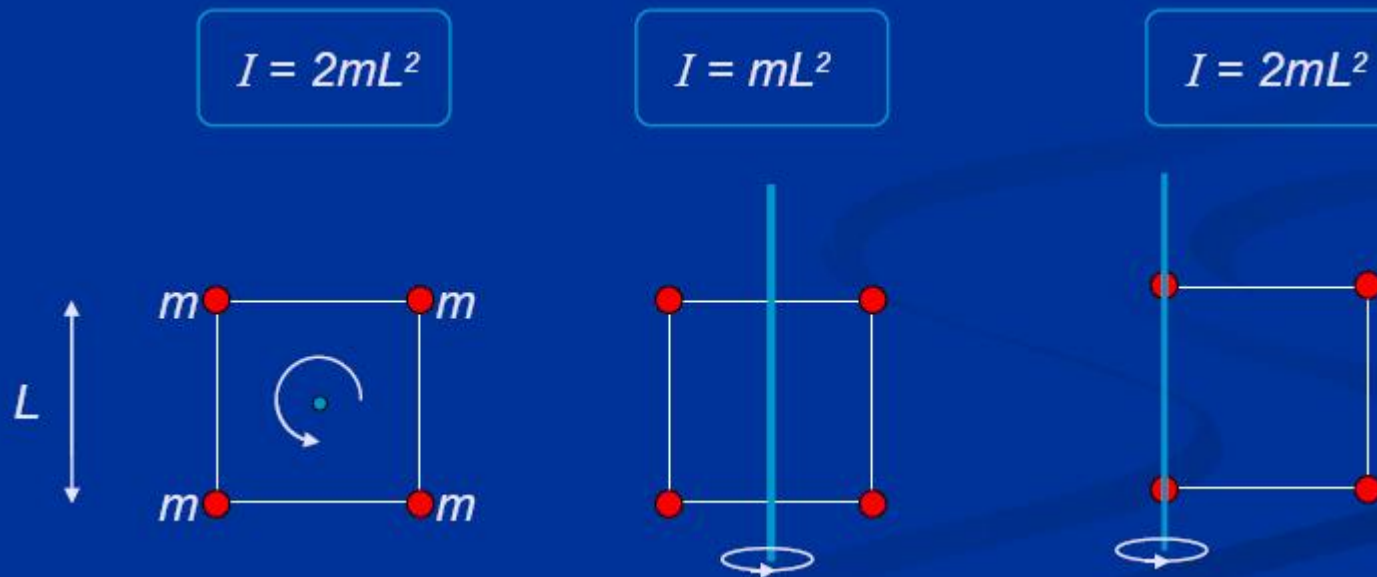
- Son olarak aynı sistemin eylemsizlik momentini bir kenarından geçen bir eksen için hesaplarsak:

$$\begin{aligned} I &= 0 + 0 + 2(m \cdot L^2) \\ &= \boxed{2mL^2} \end{aligned}$$



Eylemsizlik Momenti Hesabı...

- Aynı cisim için I dönme eksenine açıkça bağlıdır!!



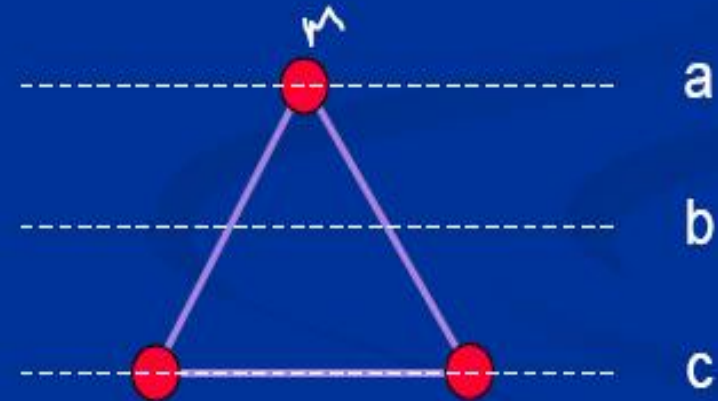
Eylemsizlik Momenti

- Üçgen şeklindeki cisim 3 özdeş kütle ve katı kütlelessiz çubuktan oluşmaktadır. a , b , ve c eksenlerine göre eylemsizlik momenti I_a , I_b , ve I_c dir.
 - Aşağıdakilerden hangisi doğrudur:

(a) $I_a > I_b > I_c$

(b) $I_a > I_c > I_b$

(c) $I_b > I_a > I_c$



Eylemsizlik Momenti

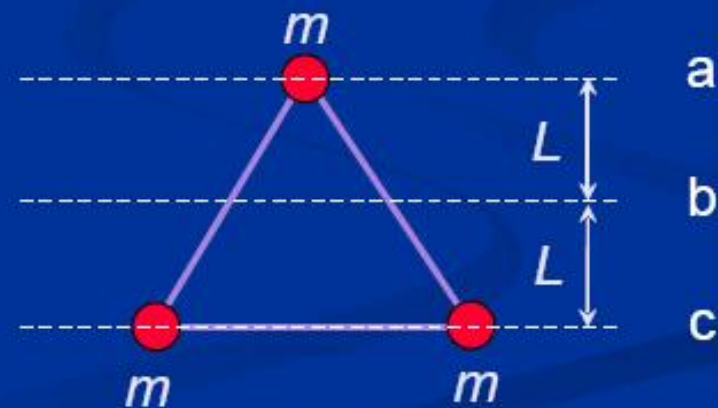
- Kütleler ve uzaklıkları işaretleyelim:
- Eylemsizlik momentini hesaplayalım:

$$I_a = m(2L)^2 + m(2L)^2 = 8mL^2$$

$$I_b = mL^2 + mL^2 + mL^2 = 3mL^2$$

$$I_c = m(2L)^2 = 4mL^2$$

(b) doğru: $I_a > I_c > I_b$



Eylemsizlik Momenti Hesabı...

- Ayrık nokta kütleleri için eylemsizlik momenti:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$



- Sürekli kütle dağılımı gösteren bir cisim için her bir sonsuz küçük dm kütle elementinden gelen mr^2 katkısını verilen bir eksen için toplamalıyız.
 - Yani eylemsizlik momenti I integralden elde edilir:

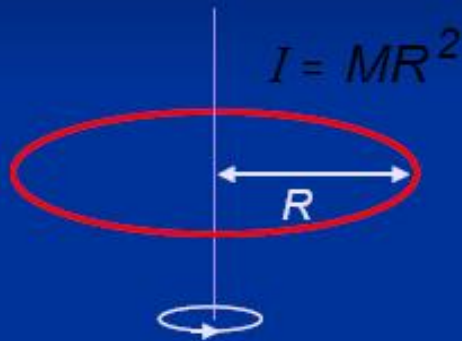
$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 \rho(\vec{r}) dv = \int r^2 \rho(\vec{r}) d^3r \Leftarrow 3 \text{ boyutlu}$$

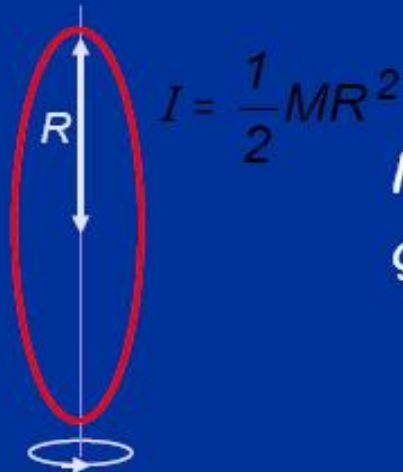


Eylemsizlik Momenti...

- Katı cisim için eylemsizlik momentine bazı örnekler:



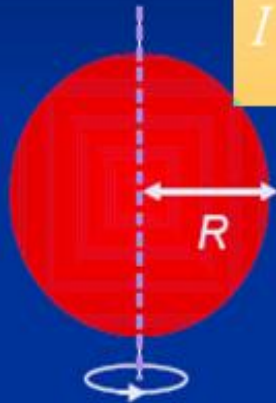
M kütleli ve R yarıçaplı bir çember için merkezinden geçen ve silindir düzlemine dik eksene göre eylemsizlik momentini



M kütleli ve R yarıçaplı bir çember için, çaptan geçen eksene göre eylemsizlik momentini

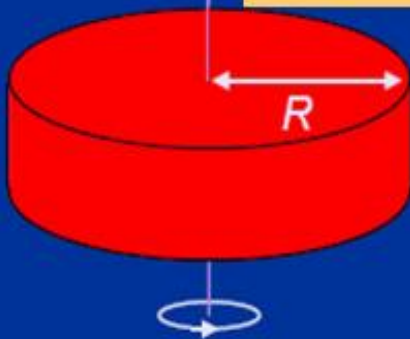
- Katı cisim için eylemsizlik momentine bazı örnekler:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



M kütleli ve R yarıçaplı katı küre için Merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti.

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



M kütleli ve R yarıçaplı katı disk yada silindir için merkezden geçen dik eksene göre eylemsizlik momenti.

Eylemsizlik Momenti

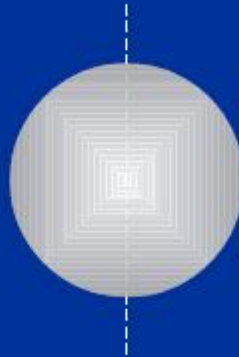
- Kütleleri ve yarıçapları aynı iki küreden biri katı alüminyumdan diğeri içi boş altın kabuğundandır.
 - Merkezden geçen eksene göre hangisinin eylemsizlik momenti daha büyüktür?

(a) Katı alüminyum

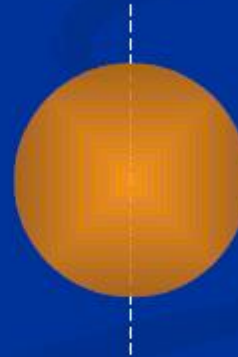
(b) oyuk altın

(c) aynı

katı



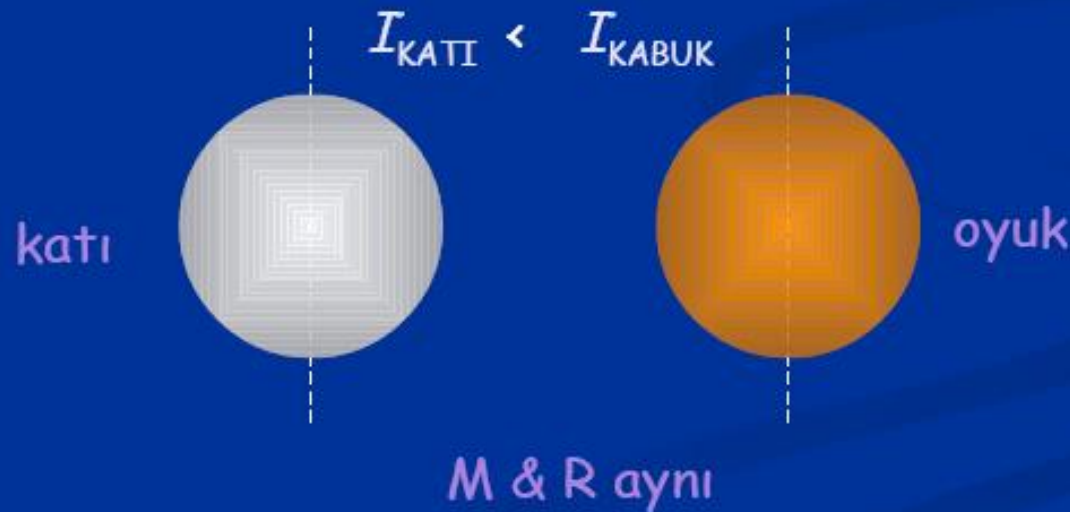
oyuk



M & R aynı

Eylemsizlik Momenti

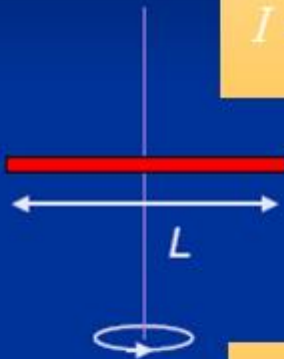
- Eylemsizlik momenti kütleye (her iki cisimde de aynı) ve dönme ekseninden olan uzaklığın karesine bağlıdır. Oyuk kürede mesafe daha büyüktür, çünkü kütlesi daha dışarıdadır.
 - Küresel kabuk (altın) daha büyük eylemsizlik momentine sahiptir.



Eylemsizlik Momenti...

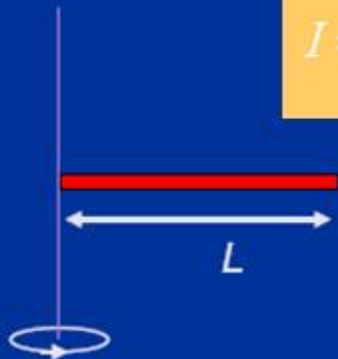
- Katı cisimler için I ya bazı örnekler :

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



M kütleli ve L uzunluklu bir çubuk için merkezinden geçen dik eksene göre eylemsizlik momenti.

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



M kütleli ve L uzunluklu bir çubuk için bir köşesinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti.

Paralel Eksen Teoremi

- M kütleli bir katı cismin kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini I_{KM} , bildiğimizi farz edelim.
- KM'inden geçen eksene paralel ve ona D uzaklığında başka bir eksene göre eylemsizlik momenti:

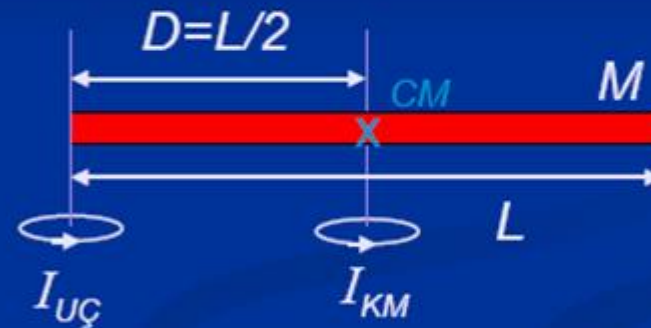
$$I_{PARALEL} = I_{KM} + MD^2$$

- Eğer I_{KM} biliyorsak KMzinden geçen eksene paralel eksene göre eylemsizlik momentini hesaplamak kolaydır.

Paralel Eksen Teoremi:Örnek

- Kütle M ve uzunluğu D olan düzgün bir çubuk dikkate alalım. Çubuğun en ucuna göre eylemsizlik momentini bulun.

$$I_{PARALEL} = I_{KM} + MD^2$$



$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{3} ML^2}$$

Örnek:

- Bir teker A $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$ lik ilk hız ile dönmektedir. $t = 0$ da 0.5 rad/s^2 lik bir ivme ile yavaşlamaya başlar. Durana kadar ne kadar zaman geçer?

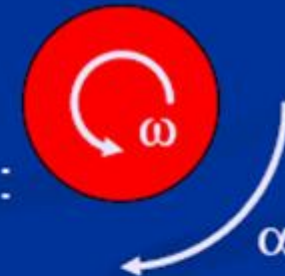
- Başlangıç hızı $\alpha = -0.5 \text{ rad/s}^2$.

- Hız formülü $\omega = \omega_0 + \alpha t$ kullanarak $\omega = 0$:

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

- Bu durumda

$$t = \frac{500 \text{ rad/s}}{0.5 \text{ rad/s}^2} = 1000 \text{ s} = 16.7 \text{ dak}$$



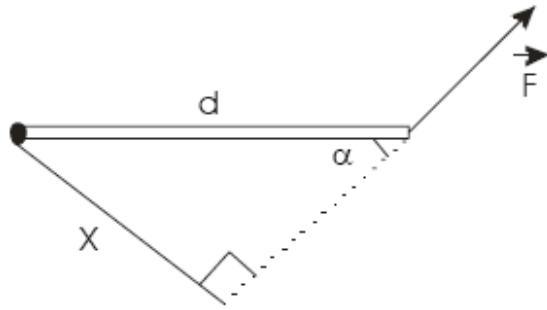
MOMENT – Tork

Bir kuvvetin döndürücü etkisine o kuvvetin momenti denir. Bir kuvvetin momenti, kuvvetin büyüklüğü ile kuvvetin dönme noktasına olan dik uzaklığının çarpımına eşittir. Moment vektörel bir büyüklüktür.

$$\vec{M} = F \cdot d \cdot \sin\alpha$$

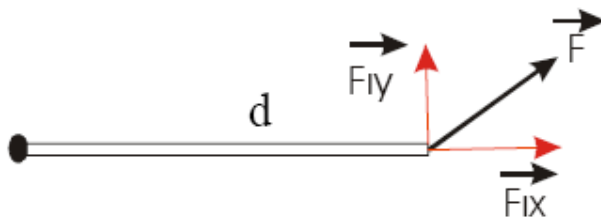
Moment	Kuvvet	Uzaklık
N.m	N	m

Örnek olarak kapı kolunun döndürülmesi, direksiyonun çevrilmesi, tornavidanın döndürülmesi verilebilir.

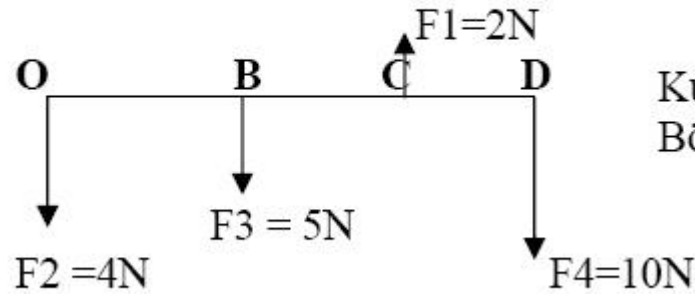


$\sin\alpha = \frac{x}{d}$ olur. Buradan dönme noktasına olan dik uzaklık;
 $x = d \cdot \sin\alpha$ olur.

Ya da; F kuvvetini dik bileşenlerine ayırırsak



Yatay bileşenin uzantısı dönme noktasından geçtiği için F_{ix} 'in momenti "0" olur. F_{iy} dönme eksenine 90° açı yaptığı için; $M = F \cdot d \cdot \sin 90^\circ$, $M = F \cdot d$ olur.

Örnek 1:

Kuvvetlerin O noktasına göre momentlerini karşılaştırınız.
Bölmeler birbirine eşit ve 1 birimdir.

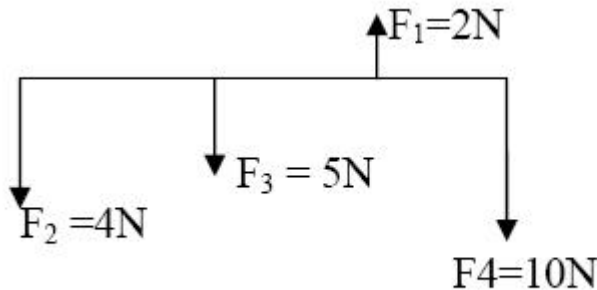
$$M_1 = 2 \times 2 = 4 \text{ n.m}$$

$$M_2 = 4 \times 0 = 0 \text{ n.m}$$

$$M_3 = 5 \times 1 = 5 \text{ n.m}$$

$$M_4 = 10 \times 3 = 30 \text{ n.m}$$

Örnek 2 : Aynı soruda O noktasına göre toplam momenti bulun deseydi. O zaman kuvvetlerin dönüş yönlerine dikkat etmemiz gerekirdi. Dikkat edilirse F1 kuvveti O noktasını sola doğru çevirmek isterken diğer kuvvetler saat yönünde çevirmek istiyorlar. F1'in döndürme yönünü (-) alırsak, diğerlerinin döndürme yönünü (+) almamız gerekir.



$$M_1 = - 2 \times 2 = - 4 \text{ n.m}$$

$$M_2 = + 4 \times 0 = 0 \text{ n.m}$$

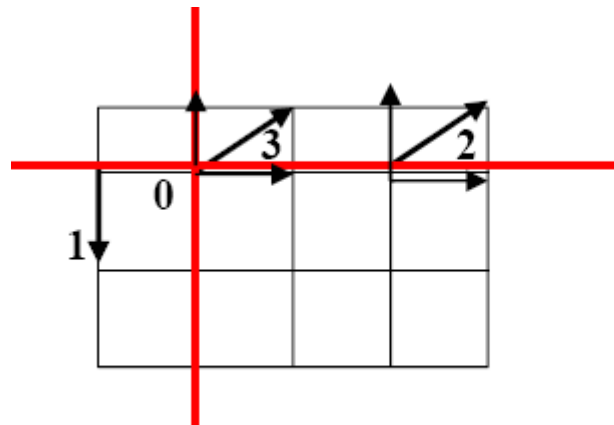
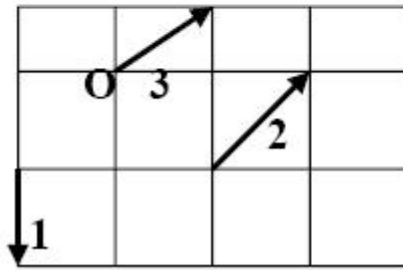
$$M_3 = + 5 \times 1 = 5 \text{ n.m}$$

$$M_4 = + 10 \times 3 = 30 \text{ n.m}$$

Toplarsak = +31 n.m çıkar. Yani saat yönünde döner. Toplam moment sıfır olsa idi çubuk dönme hareketi yapmazdı .Yani dengede kalırdı.

Örnek3: F_1 , F_2 ve F_3 kuvvetlerinin O noktasına göre toplam momentini bulunuz. (Bölmeler eşit ve 1 birimdir)

O noktasına yatay ve düşey iki eksen çizelim. Şimdi yapmamız gereken vektörel büyüklük olan kuvvetleri yönlerini, doğrultularını ve büyüklüklerini değiştirmeden bu eksenlere taşımak.



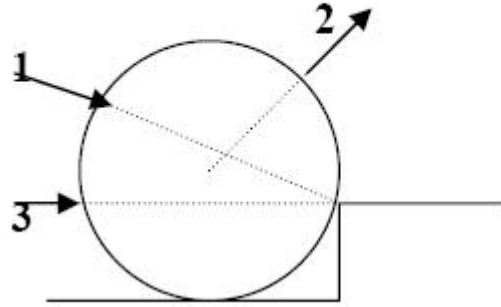
Artık kolayca moment alabiliriz. Dikkat edersek 2 numaralı kuvvetin düşeyi + işaretini O noktasına göre sola, 1 ise + işaretini yine o noktasına göre sola çeviriyor.

3'ün hem yatay hemde düşey momenti "0" dır
2'nin yatay momenti '0' dır.

Düşeyi ise $M_2 = 1 \times 2 = 2$

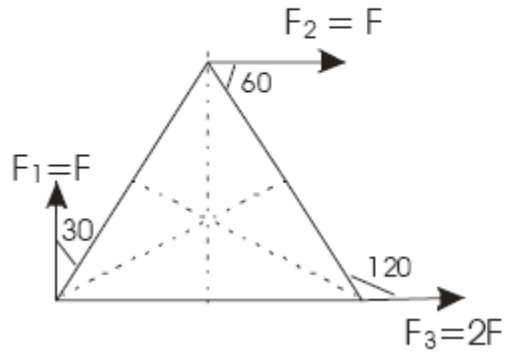
1'in momenti $M_1 = 1 \times 1 = 1$

Örnek 4 : Hangi kuvvetler cismi basamaktan yukarı çıkarabilir.

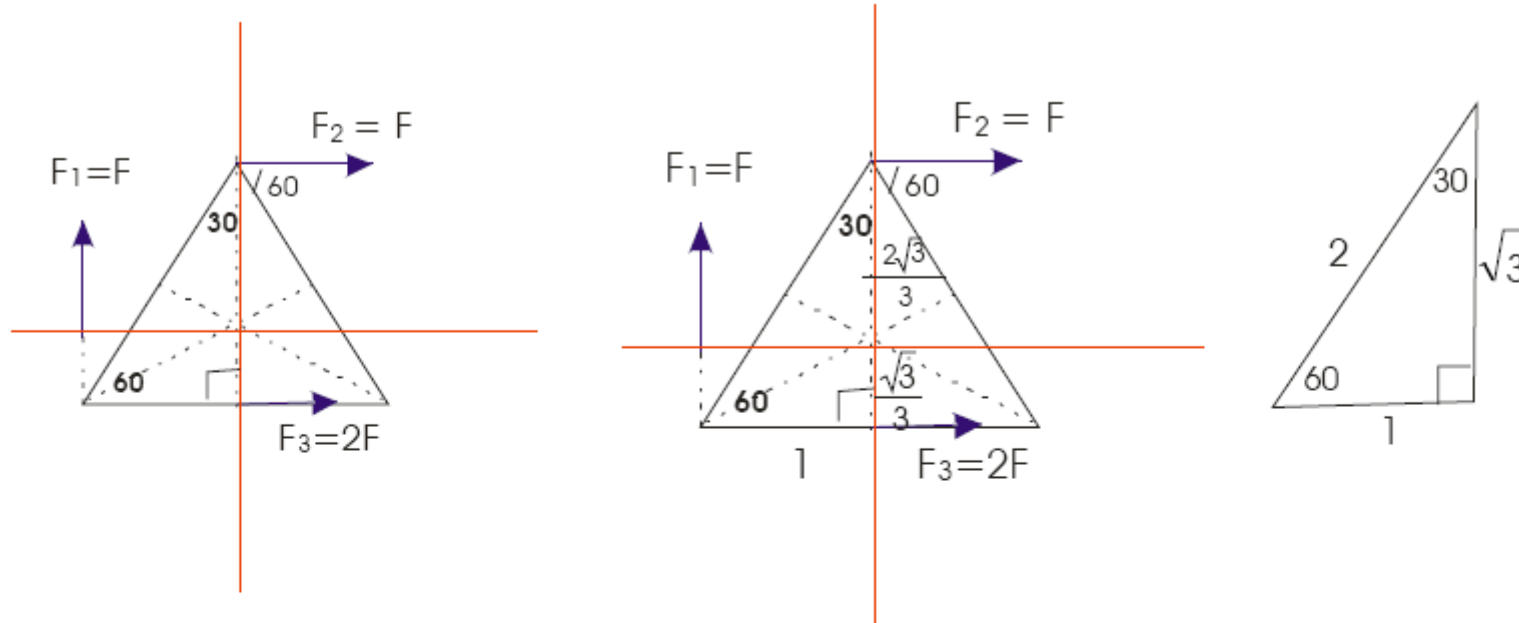


Dikkat edilirse 1 ve 3 numaralı kuvvetlerin uzantıları dönme noktasından geçmektedir. Bu durumda momentleri '0' dır. Yani döndürücü etkisi yoktur. Yalnızca 2 numaralı kuvvetin döndürücü etkisi vardır.

Örnek 5 :



Şekildeki eşkenar üçgenin köşelerine uygulanan kuvvetlerden F_1 'in momenti "O" noktasına göre M ise toplam moment kaç M'dir?



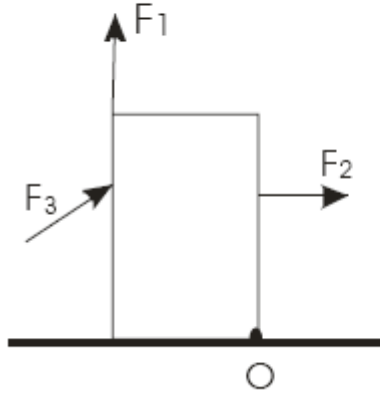
İlk yapmamız gereken O noktasına (köşegenlerin kesim noktasına) bir yatay bir de dikey çizgi çizmek. (Eksen Metodu) Bundan sonra yapmamız gereken doğrultularını; yönlerini ve O noktasına olan uzaklıklarını değiştirmeden kuvvetleri en yakın eksene taşımak. Bundan sonra dönme noktasına göre çok rahat moment alabiliriz. Dik uzaklıklarda, dönüş yönleri de bellidir. F_2 + işaretini sağa, F_1 + işaretini sağa, F_3 ise + işaretini sola döndürmektedir. Saat yönünü +, diğer yönü - alalım.

$$M_1 = +F \times 1 = +F$$

$$M_2 = +F \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = +\frac{2\sqrt{3}}{3} F$$

$$M_3 = -2F \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} F$$

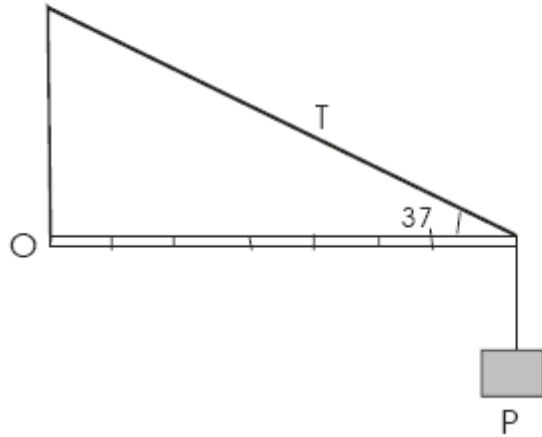
Toplarsak sonuç +F olur. O da M_1 'in momenti olan M'e eşittir.

Örnek 6 :

Şekildeki düzgün türdeş cisim F_1 , F_2 , F_3 kuvvetleri ayrı ayrı uygulandığında “O” noktası etrafında ancak dönebilmektedir. Bun göre kuvvetlerin “O” noktasına göre momentleri arasında nasıl bir ilişki vardır.

Bu kuvvetler ayrı ayrı uygulandığında cisimi ancak döndürüyorlarsa; demek ki bu kuvvetlerin “O” noktasına göre momentleri eşittir.

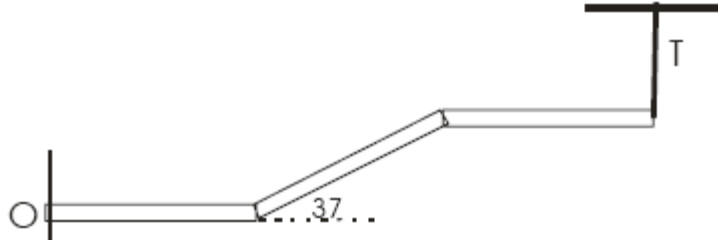
Örnek 8 :



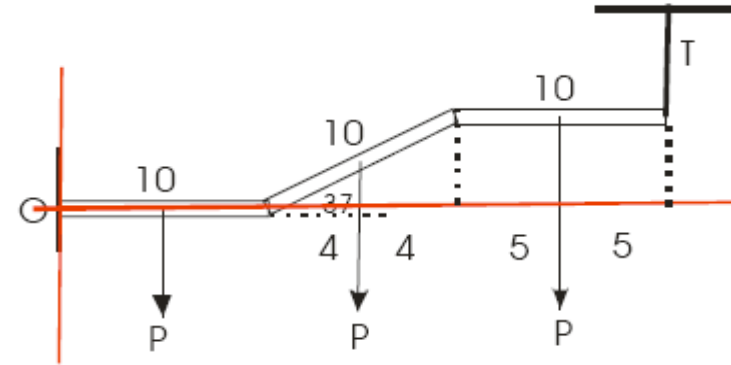
Şekildeki sistem dengede olduğuna göre $P = 30\text{N}$ ise $T = ? \text{ N}$ dur. (Çubuk ağırlıksızdır.)

$$T \cdot \sin 37^\circ \times 7 = P \times 7 \rightarrow T \cdot \frac{3}{5} \times 7 = 30 \times 7 \rightarrow T = 50 \text{ N olur.}$$

Örnek 9 :



Şekildeki sistem ağırlığı 3'er N olan üç çubuktan oluşmuştur. Sistem dengede olduğuna göre $T = ?$ ipteki gerilme kuvveti kaç N'dur?



Çubuklar özdeş olduğuna göre her birin boyuna 10 birim diyelim. Dikkat edilirse ikinci çubuğun olduğu yerde bir 3, 4, 5 üçgeni elde edilir. O noktasına yine bir yatay bir düşey eksen çizersek. Dik uzaklıklar ve yönler çok açık belli olur.

O noktasına göre moment alırsak;

$$T \times 28 = P \times 5 + P \times 14 + P \times 23$$

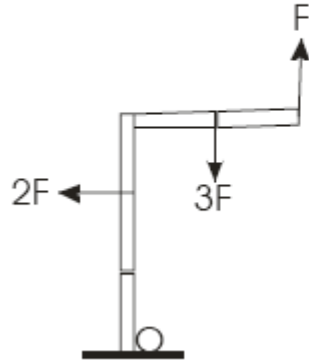
$$T \times 28 = 3 \times 5 + 3 \times 14 + 3 \times 23$$

$$T \times 28 = 15 + 42 + 69$$

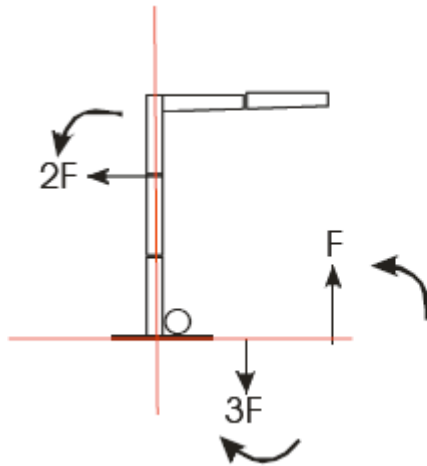
$$T \times \frac{28}{28} = \frac{126}{28}$$

$$T = 4,5 \text{ N}$$

Örnek 10 :



O noktasına göre toplam momenti bulunuz.



Sol yönü (-), diğer yönü + alalım.

$$\sum M = -2F \cdot 2 - F \cdot 2 + 3F \cdot 1 = -3F$$

Cisim sola doğru O noktası etrafında dönme hareketi yapar.

MOMENTLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

- ★ Kuvvetin kendisi veya uzantısı dönme noktasından geçiyor ise o kuvvetin momenti “0” olur. Yani döndürücü etkisi olmaz.
- ★ Kuvvet dönme eksenine 90° açı yaptığı zaman, momenti en büyük duruma gelir.
- ★ Birden fazla kuvvetin (eşit büyüklükte) dönme noktasına olan uzaklıkları eşit, dönme eksenine yaptıkları açılar farklı ise dönme eksenine küçük açı yapan kuvvetin momenti en küçük olur.
- ★ Bir cismin farklı noktalarına (çubuk şeklinde olsun) ayrı ayrı uygulanan kuvvetler cismi ancak döndürebiliyorsa, bu kuvvetlerin momentleri eşit olur.
- ★ Toplam moment “0” ise o cisim dengededir.

10-7 Tork ve Açısal İvme Arasındaki Bağntı

Teğetsel kuvvet F_t , teğetsel ivmeyi (a_t) oluşturur.

$$F_t = ma_t$$

F_t kuvvetinin dairenin merkezine göre uyguladığı tork ($\theta=90^\circ$)

$$\tau = F_t \cdot r = ma_t r$$

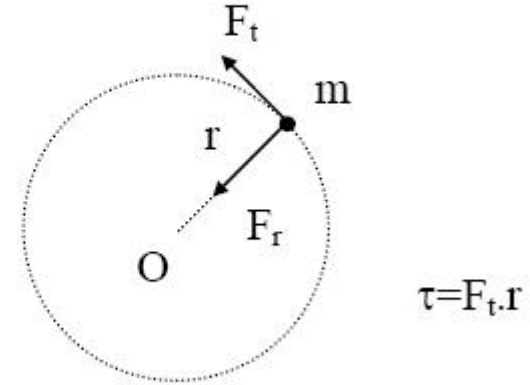
Teğetsel ivme açısal ivmeye $a_t = r\alpha$ eşitliği ile bağlı olduğundan;

$$\tau = (mr\alpha) \cdot r = mr^2 \alpha$$

$I = mr^2$ olduğu hatırlanırsa, burdan

$$\tau = I\alpha$$

Bulunur. Bu eşitlik, Newton'un doğrusal hareket için türettiğimiz $F=ma$ hareket kanununa benzemektedir.



Doğrusal

m

a

F

Dönme

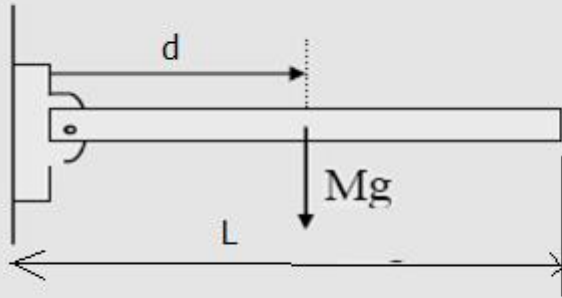
I

α

τ

Örnek 10.10 *Dönen Çubuk:* Uzunluğu L , kütlesi M olan düzgün bir çubuk, şelildeki gibi bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilecek durumdadır. Çubuk yatay durumda iken serbest bırakılıyor. Çubuğun ilk açısal ivmesi ve sağ ucunun ilk çizgisel ivmesi nedir?

Çözüm:



$$\tau = F \cdot d$$

$$\tau = Mg(L/2)$$

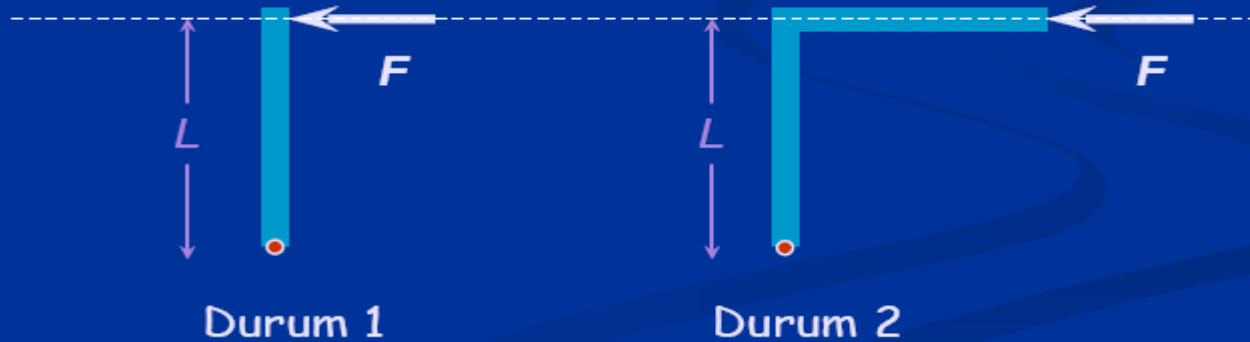
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(\frac{L}{2})}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

- Aşağıdaki durumlardan hangisinde dönme eksenini etrafında uygulanan kuvvetin torku daha büyüktür? Her iki durumda da uygulanan kuvvetin büyüklüğü ve yönü aynıdır.

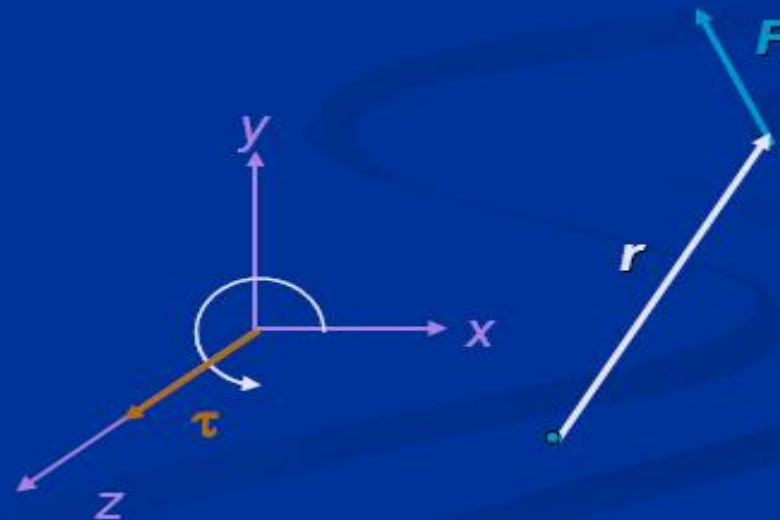
- (a) durum 1
- (b) durum 2
- (c) aynı

→ Tork aynı!



Tork ve Sağ El Kuralı:

- Sağ el kuralı ile Tork'un yönünü tayin ederiz:
 - Elinizi dönme ekseninden kuvvetin uygulandığı yöne doğru yöneltin.
 - Parmaklarınızı kuvvet yönünde döndürün.
 - Baş parmağınız tork'un yönünü gösterecektir..



- Tork'un vektörel doğasını çapraz (vektörel) çarpım ile tanımlayabiliriz.
 - İki vektörün çapraz çarpımı 3. bir vektör verir:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

- Sonuç vektör $\mathbf{C}$ büyüklüğü:

$$C = AB \sin \phi$$



- Sonuç vektörün $\mathbf{C}$ yönü $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektörlerinin bulunduğu düzleme diktir ve yönü sağ el kuralı ile bulunur.

Çapraz Çarpım

- Çapraz çarpımın kartezyen bileşenleri:

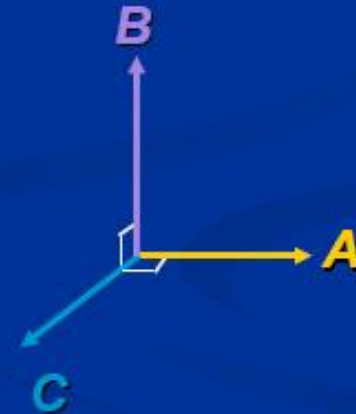
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$C_x = A_y B_z - B_y A_z$$

$$C_y = A_z B_x - B_z A_x$$

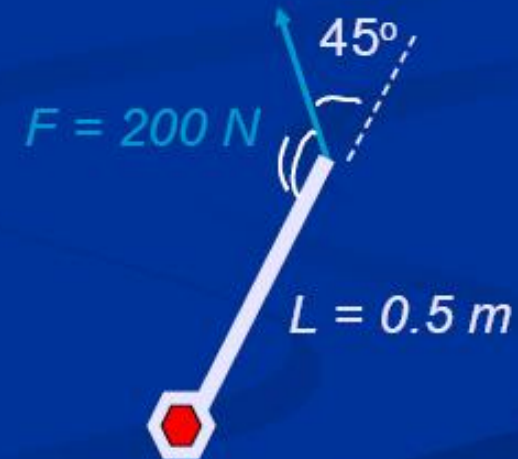
$$C_z = A_x B_y - B_x A_y$$

Not: $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$



Örnek

- Sıkılmış bir somun'u (büyük vida) gevşetmek için 50 cm uzunluğundaki bir anahtar ile somuna 45° derecede 200 N kuvvet uygulanıyor.
 - Somun üzerine uygulanan tork'un büyüklüğü nedir?
 - Eğer somun aniden serbest dönmeye başlarsa, anahtarın açısal ivmesi nedir? (Anahtarın kütlesi 3 kg, ve şekli inçe bir çubuktur).

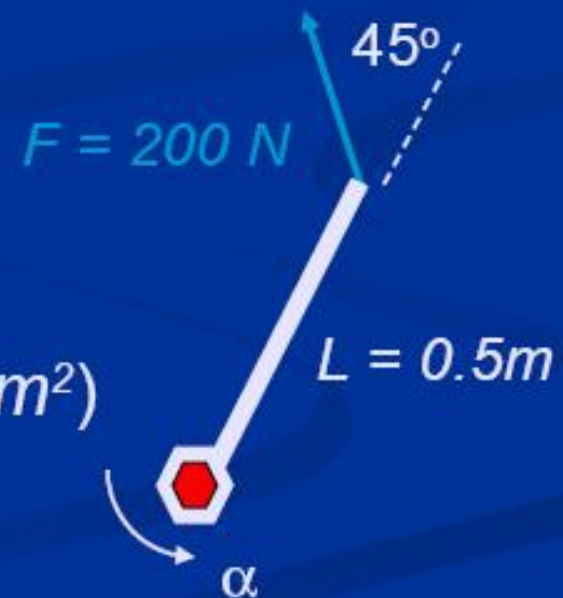


- Tork $\tau = LF \sin \phi = (0.5 \text{ m})(200 \text{ N})(\sin 45^\circ) = 70.7 \text{ Nm}$
- Somun serbest dönerse, $\tau = I\alpha$
 - ▶ Tork'u τ biliyoruz ve α bulmak için I_y hesaplamalıyız

$$I = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}(3 \text{ kg})(0.5 \text{ m})^2 = 0.25 \text{ kgm}^2$$

$$\rightarrow \alpha = \tau / I = (70.7 \text{ Nm}) / (0.25 \text{ kgm}^2)$$

$$\alpha = 283 \text{ rad/s}^2$$



İş & Kinetik Enerji

- İş/Kinetik enerji teoremi: $\Delta K = W_{NET}$
- Bu genel olarak doğrudur ve hem çizgisel hem de dairesel hareket için geçerlidir.
- Sabit bir eksen etrafında dönen bir cisim için:

$$\Delta K = \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) = W_{net}$$

Örnek: Disk & İp

- Kütlesi $M=40$ g ve yarıçapı $R=10$ cm olan bir diskin etrafına kütlesiz bir ip 10 kez sarılıyor. Disk merkezinden geçen eksen etrafında sürtünmesiz dönmektedir. İp $F=10$ Nluk bir kuvvetle çözülene kadar çekiliyor. (İpin kaymadığını ve diskin başlangıçta dönmediğini kabul edelim.)
 - İp çözüldüğünde diskin dönme hızı nedir?



ÇÖZÜM

Disk & İp...

- Yapılan iş $W = \tau \theta$
 - Tork $\tau = RF$ (çünkü $\phi = 90^\circ$)
 - Açısal yer değiştirme θ

$$2\pi \text{ rad/tur} \times 10 \text{ tur.}$$

$$\bullet W = \underbrace{(.1 \text{ m})(10 \text{ N})}_{\tau} \underbrace{(20\pi \text{ rad})}_{\theta} = \boxed{62.8 \text{ J}}$$



$$W_{NET} = W = 62.8 \text{ J} = \Delta K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

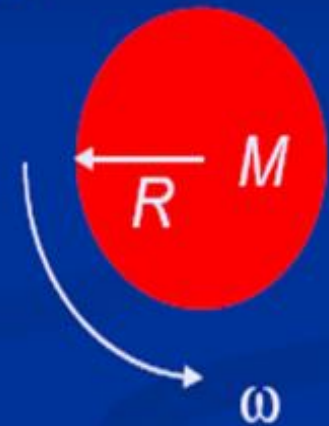
Merkezinden geçen eksen etrafında dönen dönen
Disk için I:

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \omega^2 = W$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4W}{MR^2}} = \sqrt{\frac{4(62.8 \text{ J})}{(.04 \text{ kg})(1)^2}}$$

$$\omega = 792.5 \text{ rad/s}$$



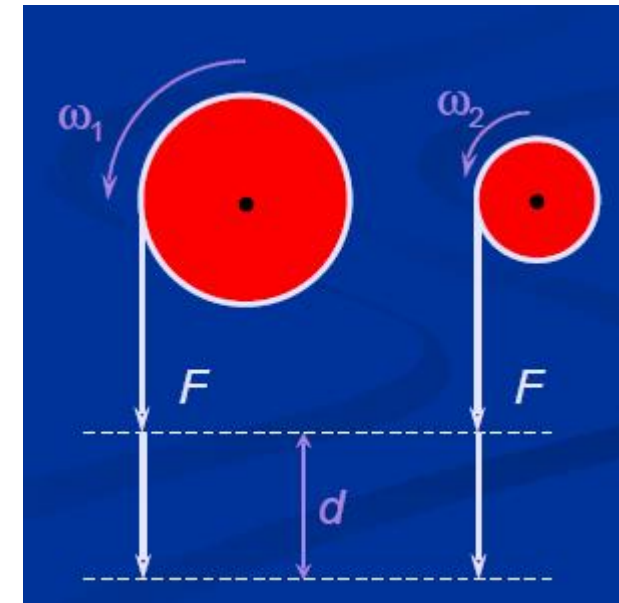
- Disklerin çevresine ip bağlayıp aynı kuvvetle bir süre aynı mesafede çekiliyor. Disk 1'in yarı çapı daha büyüktür ve her iki diskin **eylemsizlik moment**i aynıdır. Her iki diskte merkezinden geçen bir eksen etrafında dönmekte ve başlangıçta durumdurlar.
 - Çekmeden sonra hangi diskin açısal hızı daha büyüktür?

- (a) disk 1
- (b) disk 2
- (c) aynı

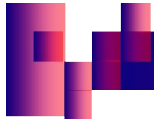
Biliyoruz ki $\Delta K = \frac{1}{2} I \omega^2$

Ve $I_1 = I_2$

$$\omega_1 = \omega_2$$



- Yapılan iş her iki disk içinde aynıdır!
 $\Rightarrow W = Fd$
- Kinetik enerjideki değişiklik aynı olacaktır, zira $W = \Delta K$.



Basit Makineler

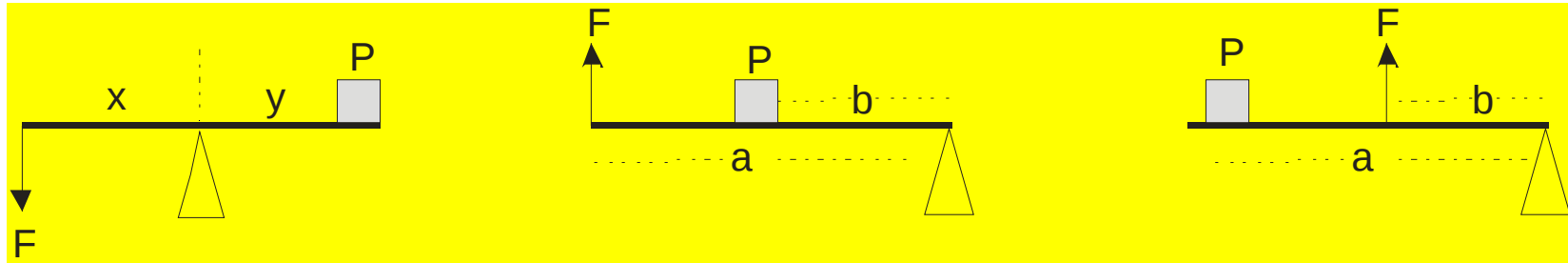
- Basit makineler günlük işlerimizi yaparken iş kolaylığı sağladıkları için kullanılırlar. İşten bir kazanç sağlamazlar. Yalnızsa zamandan bir kazanç sağlarlar. Yoldan kazandığımız oranda kuvvetten, kuvvetten kazandığımız oranda yoldan kaybederiz. Basit makine sorularında genellikle sürtünme ihmal edilir.



Verim

- Verim : Yükün yaptığı iş
Kuvvetin yaptığı iş
- Verim : uygulanması gereken kuvvet
uygulanan kuvvet

Kaldıraç



$$F.x = P.y$$

$$x > y \text{ ise } F < P$$

$$x < y \text{ ise } F > P$$

Tahterevalli, Terazî,
Makas, pense, leviye

$$F.a = P.b$$

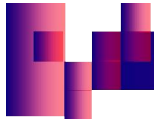
$$a > b \text{ ise } F < P$$

El arabası , kürek

$$F.b = P.a$$

$$a > b \text{ ise } F > P$$

Maşa, cımbız,
insan kolu



Sabit Makara

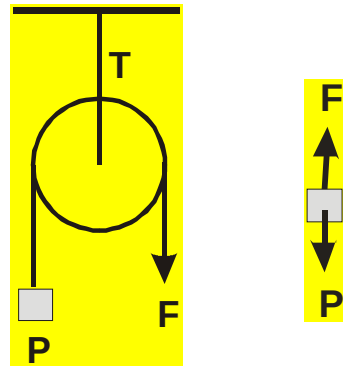
- Sabit makaralar kuvvetin yönünün değiştirir. Yoldan veya kuvvetten bir kazanç yoktur. Yalnızca iş kolaylığı sağlarlar. Sabit makaralarda makaranın ağırlıklı veya ağırlıksız olması uygulanması gereken kuvveti etkilemez. Makara ağırlığı yalnızca makaranın asıldığı ipteki gerilme kuvvetini arttırır. İp kaç metre çekilirse yükte o kadar yol alır.

Sabit Makara

- Kuvvetin uygulandığı ipten yola çıkarak ipi takip edersek. $F = P$ olur.

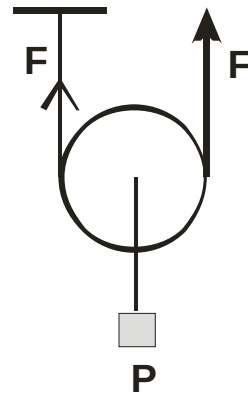
Makara ağırlıksız ise ipteki gerilme kuvveti;
 $T = P + F$ olur.

Makara G ağırlığında ise ; $T = P + G + F$ olur.



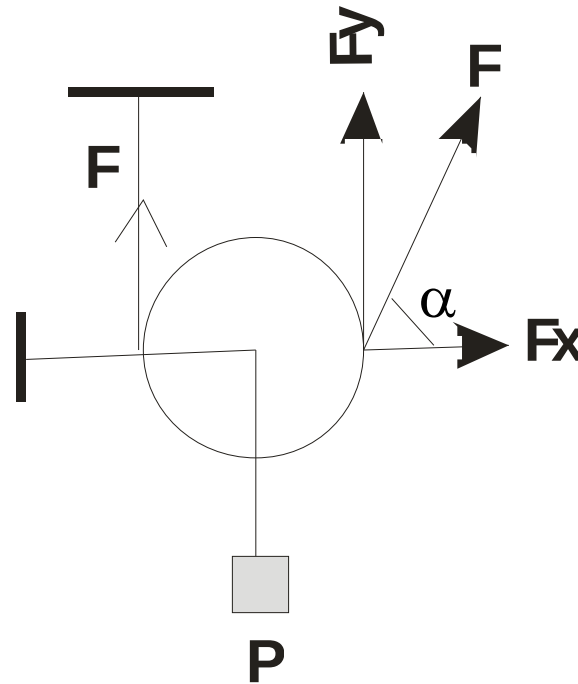
Hareketli Makara

- Hareketli makaralarda kuvvetten kazanç sağlanır. İp 2m çekilirse yük 1m yükselir. Makara ağırlığı ihmal edilmiş ise ;
- $2F = P \rightarrow F = P / 2$ olur.
- Makara ağırlıklı ise ; $2F = P + G \rightarrow F = \frac{P + G}{2}$



Sabit Makara

- $F + F_y = P$ olur. F_x kuvveti ise ipteki gerilme kuvvetine sebep olur. $T = F_x$ olur.



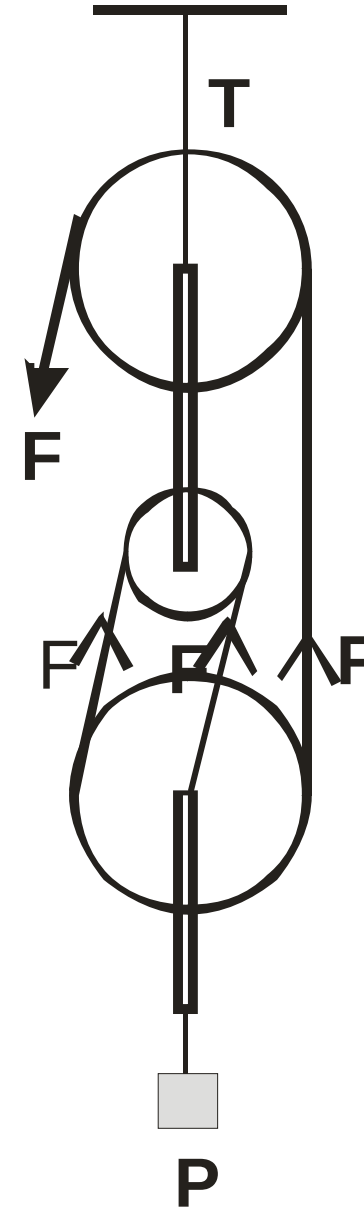
Palangalar

- Makaralar ağırlıksız ise ;

$$3F = P \rightarrow F = P/3 \text{ olur.}$$

Ya da

$$F = \frac{\text{Yük}}{\text{makara sayısı}}.$$



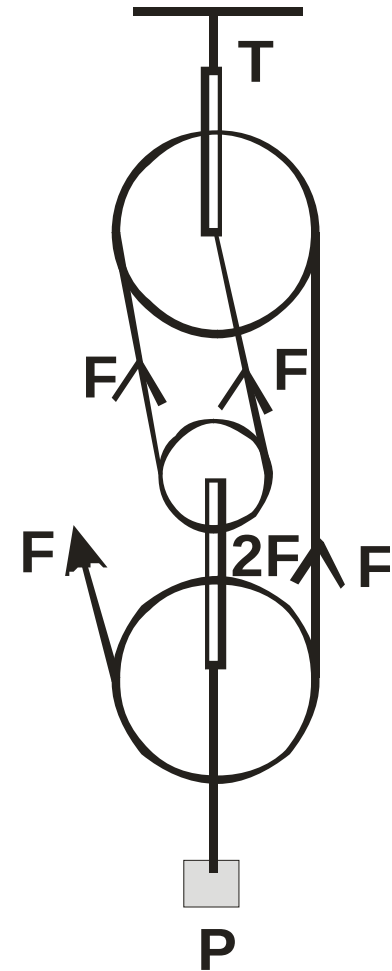
Palangalar

- Eğer kuvvet aşağıdan yukarı doğru ise ve makaralar ağırlıksız ise ;

$$T = F + F + F \rightarrow T = 3F \text{ olur.}$$

$$F + F + 2F = P \rightarrow F = P/4 \text{ olur. Ya da}$$

$$F = \frac{\text{Yük}}{\text{makara sayısı} + 1}.$$

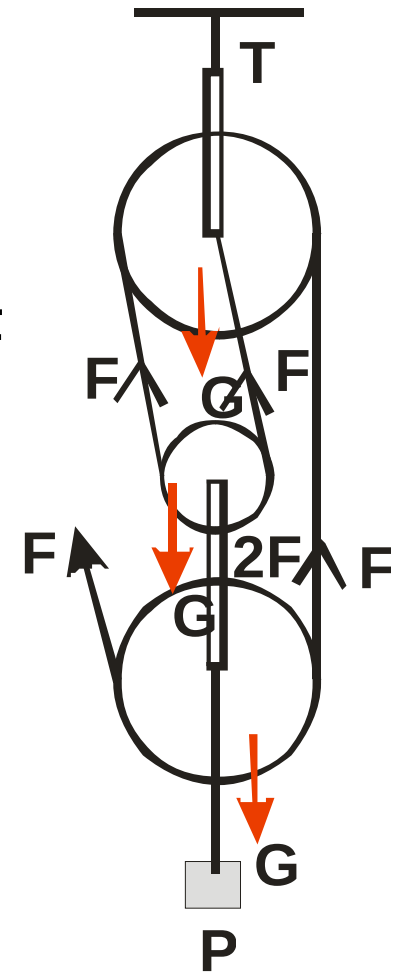


Palangalar

- Makaralar ağırlıklı olsaydı;

$$T = F + F + F + G \rightarrow T = 3F + G$$

$$2F + F + F = P + G + G \rightarrow 4F = P + 2G \quad F = \frac{P + 2G}{4} \text{ olur.}$$

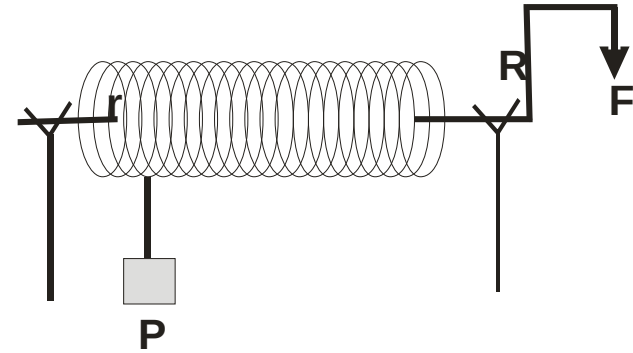
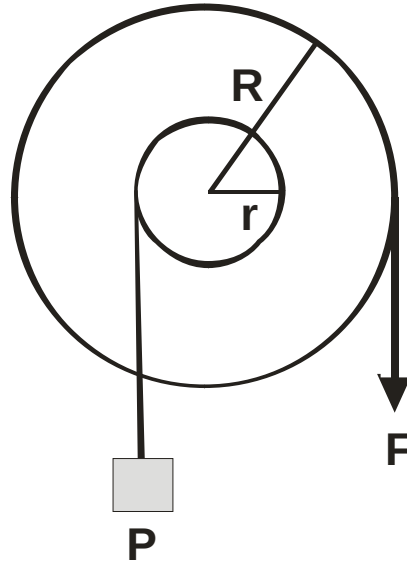


Çıkrık

- $F.R = P.r$

P yükünün yükselme miktarı;

$$h = n.2\pi r$$

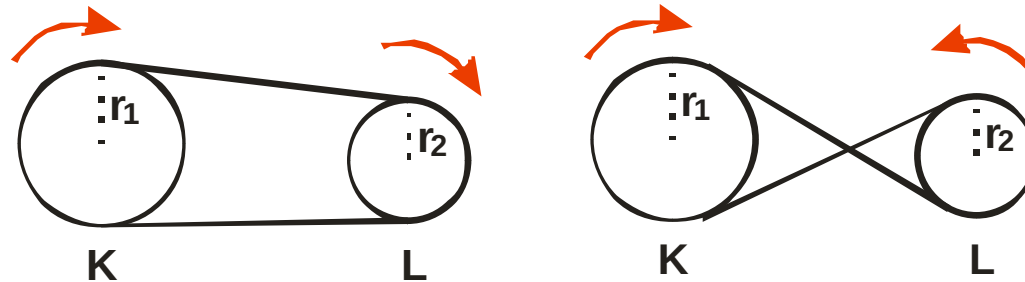


Kasnak

- Şekildeki K ve L kasnakları aynı yönde dönme hareketi yaparlar. K ve L'nin çizgisel hızları birbirine eşit. Fakat açısal hızları birbirinden farklı olur. Frekansları, tur sayıları yarıçaplarla ters orantılıdır. İpler üzerindeki gerilme kuvvetleri birbirine eşittir.

$$f_K \cdot r_1 = f_L \cdot r_2 \quad \text{ve} \quad n_1 \cdot r_1 = n_2 \cdot r_2$$

f : frekans , n : dönme sayısı



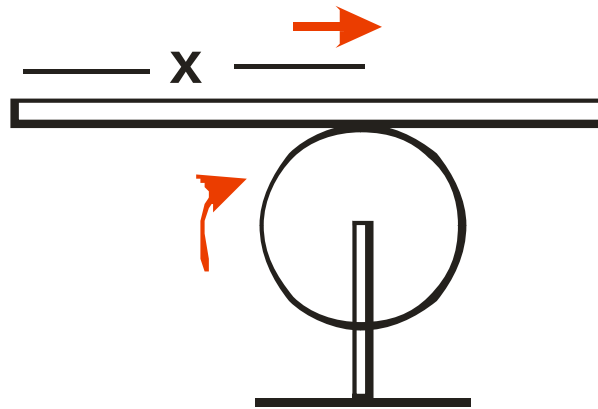
Sabit Makara

- Çubuk sabit makara üzerinde x kadar hareket ettirilirse;

$x = n \cdot 2\pi r \rightarrow n = x / (2\pi r)$ kadar makara döner.

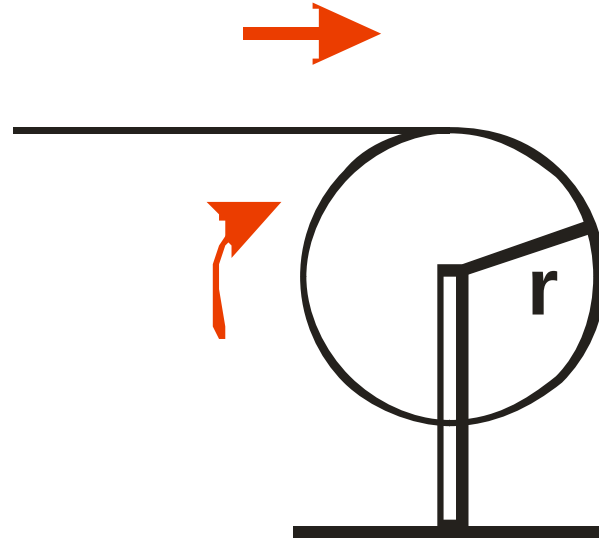
n = sabit makaranın dönme sayısı

r = sabit makaranın yarıçapı



Sabit Makara

- Makara n tur atarsa ip;
 $x = n \cdot 2\pi r$ kadar ip sarılır.
(Tam tersi n tur sola doğru atsaydı; bu sefer makara $x = n \cdot 2\pi r$ kadar ip bırakırdı.)



Hareketli Makara

- Makara n tur atarak ilerleseydi; ne kadar ip sarardı?

Makara hem dönme hareketi hem de öteleme hareketi yapar.

$x = n \cdot 2\pi r$ (dönerek ip sarar) ; $x = n \cdot 2\pi r$ (öteleme yaparak ip çeker)

