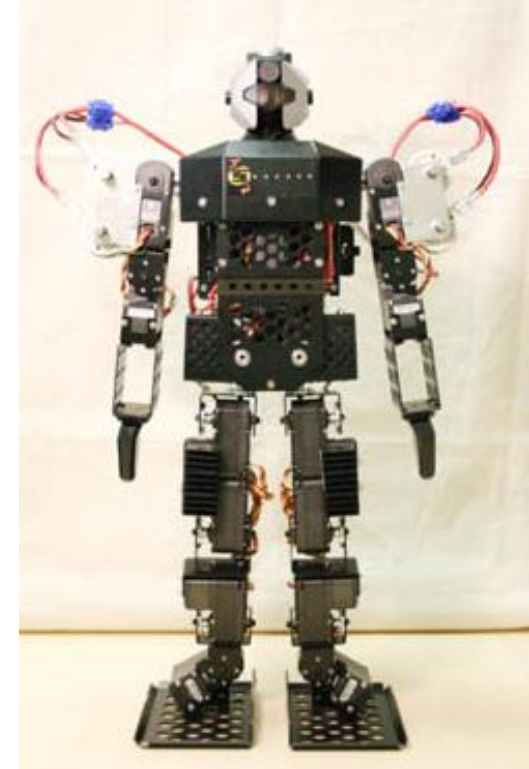
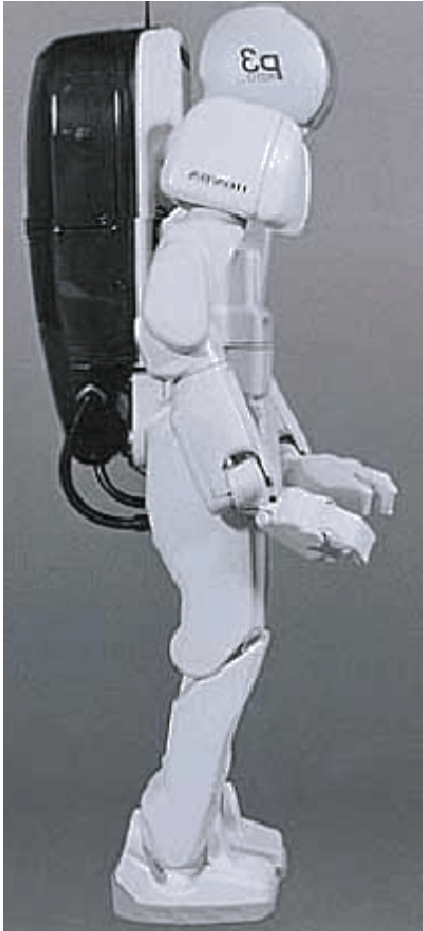
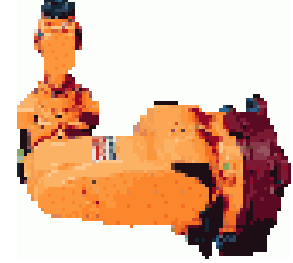




TEMEL ROBOTİK

Ders sorumlusu: Yrd.Doç.Dr.Hilmi KUŞÇU





İleri Yön (Düz) Kinematiği

Bir robot ana çerçevesinden araç çerçevesine doğru birbirine prizmatik veya döner eklemlerle bağlanmış seri uzuvlardan oluşur. İki uzuv arasındaki ilişki bir homojen dönüşüm matrisiyle açıklanır. Eklem dönüşüm matrislerinin ard arda çarpılmasıyla ana çerçeve ile araç çerçeve arasındaki ilişki tanımlanır. Bu ilişki manipülatörün araç çerçevesinin konumunu ve yönelimini ana çerçeveye göre belirtir.

Kısaca ileri yön kinematiği eklem değişkenleri ile uç işlevcisinin konumu ve yönelimini ana çerçeveye göre hesaplar diyebiliriz.

Her bir ekleme bir koordinat sistemi yerleştirilse komşu iki eklem arasındaki ilişki bir ${}^{i-1}_iT$ dönüşüm matrisiyle elde edilir.



İlk ekleme ait dönüşüm matrisi ilk eklem ile ana çerçeve arasındaki ilişkiyi tanımlarken, son ekleme ait dönüşüm matrisi uç işlevcisi ile son eklem arasındaki ilişkiyi ifade eder. Arka arkaya sıralanan bu eklem dönüşüm matrisleriyle ana çerçeve ile araç çerçevesi arasındaki ilişki tanımlanır. Bu ilişkiye de ileri kinematik denir. Ana çerçeve ile araç çerçevesi arasındaki ilişki

$${}^0T_N = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{N-1}T_N \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

Eklem Değişkenlerinin Belirlenmesi

Robotların eklem değişkenlerinin belirlenmesi için birçok kinematik yöntem belirlenmiştir. Kinematik problemler Kartezyen üç boyutlu ve kartonom dört boyutlu olmak üzere iki farklı uzayda gerçekleştirilir. Kartezyen uzayda üstel yöntem, Pieper-Roth yöntemi ve Denativ-Hartenberg yöntemi kullanılır. Ancak en fazla tercih edilen yöntem Denativ-Hartenberg yöntemidir.



Denativ-Hartenberg Yöntemi

Bu yöntemde dört ana değişken kullanılarak robot kinematiği çıkarılır.

Bu değişkenler

iki eksen arasındaki uzuv uzunluğu a_{i-1}

iki komşu eksen arasındaki eksen açısı α_{i-1}

üst üste çıkan bağlar arasındaki eklem kayması(kaçıklığı) d_i

ve iki komşu uzuv arasındaki eklem açısı θ_{i-1} 'dir.

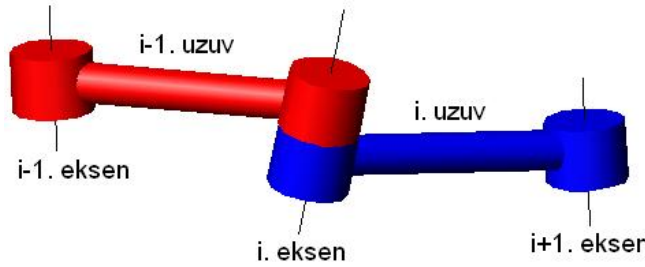
Bu dört değişkende D-H Değişkenidir.



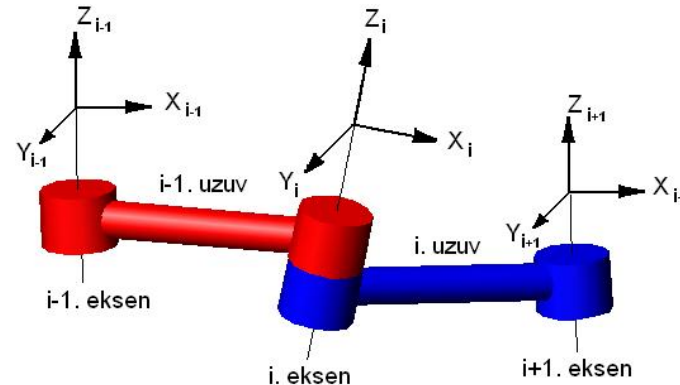
Eksenler aşağıdaki hususlar dikkate alınarak yerleştirilir.

1. Öncelikle eklem eksenleri dönme veya kayma yönleri belirlenir ve bu eksene paralel bir doğru çizilir
2. Bu işlem gerçekleştirilirken eklem eksenleri, döner eksenler için dönme yönü Z, prizmatik eklemler için kayma yönü Z eksenini olarak belirlenir.
3. Z eksenine dik ve kol boyunca olan bağ (uzuv) uzunluğu X eksenini olarak kabul edilir.
4. Z ve X eksenleri belirlendikten sonra sağ el kuralına göre Y eksenini bulunur.
5. Eğer arka arkaya gelen 2 eklemin dönme veya kayma yönleri aynı ise Z eksenini belirlendikten sonra kol boyunca X eksenini belirlenir. Son olarak sağ el kuralına göre Y eksenini belirlenir.
6. 0 ve 1. eksenler üst üste kabul edilebilir.
7. Bir seri robotun eklemine koordinat sistemleri yerleştirilirken 1. eksenin dönme yönü Z eksenini olarak belirlendikten sonra genellikle bu eksene X eksenince döndürüldüğünde komşu iki Z eksenini çakışacak şekilde bir X eksenini yerleştirilir.

Bu değişkenleri belirlemek için öncelikli olarak şekilden görüldüğü gibi robotun dönme eksenleri belirlenir ve dönme eksenleri uzuvlardan bir fazla olacak şekilde numaralandırılır.

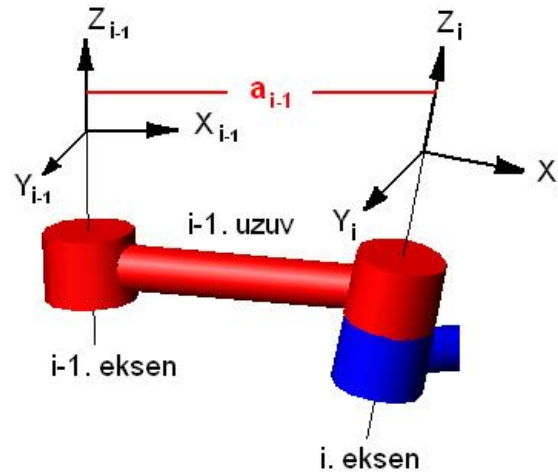


Daha sonra bu eksenlerin her birine bir koordinat sistemi yerleştirilir ve uzuv dönme eksenini aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi koordinat sisteminin Z eksenini kabul edilir.

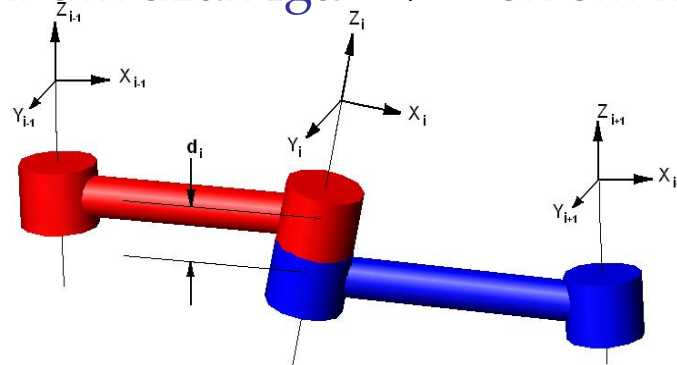




Aşağıdaki şekildeki gibi X_{i-1} yönünde uzanan Z_{i-1} ile Z_i eksenleri arasındaki dik uzaklığa a_{i-1} uzuv uzunluğu denir.

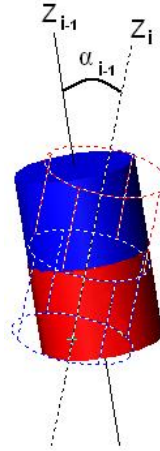


Aşağıdaki şekildeki gibi Z_i yönünde uzanan X_{i-1} ile X_i eksenleri arasındaki dik uzaklığa d_i eklem kaçıklığı denir.

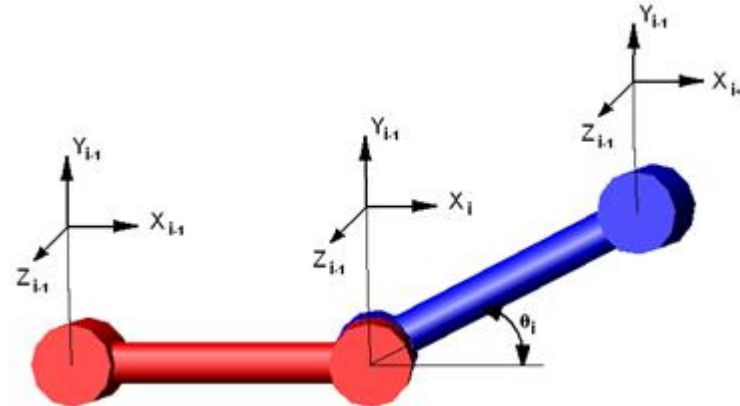




Aşağıdaki şekildeki gibi Z_{i-1} eksenini ile Z_i eksenini arasındaki X_i boyunca ölçülen açılara α_{i-1} eksen açısı denir.



Aşağıdaki şekildeki gibi X_{i-1} eksenini ile X_i eksenini arasındaki Z_i boyunca ölçülen açılara θ_i eklem açısı denir.





Koordinat sistemleri eklemlere yerleştirildikten sonra D-H değişkenleri bulunur ve aşağıdaki tabloya yazılır. Robotun hareket etmesiyle değişmeyen parametreler a_{i-1} uzuv uzunlukları ve α_{i-1} eksen açılarıdır. Değişen parametreler ise eklem döner ise θ_{i-1} eklem açısı eğer eklem prizmatik ise d_{i-1} eklem kaçıklığıdır.

Eksen No	D-H Değişkenleri				Eklem Değişkeni
	2 komşu eksen açısı	Uzuv Uzunluğu	Eklem kaçıklığı	Eklem açısı	
$\bar{I}$	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i Veya θ_i
1	α_0	a_0	d_1	θ_1	d_1 Veya θ_1
2	α_1	a_1	d_2	θ_2	d_2 Veya θ_2
3	α_2	a_2	d_3	θ_3	d_3 Veya θ_3
4	α_3	a_3	d_4	θ_4	d_4 Veya θ_4

$${}^{i-1}_iT = R_x(\alpha_{i-1})D_x(a_{i-1})R_z(\theta_i)D_z(d_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her bir ekleme ait genel dönüşüm matrisi buradan elde edilir.



Dönüşüm matrislerin çarpılmasıyla uç işlevcisinin konumunu ve yönelimini içeren ve eklem değişkenlerinin birer fonksiyonu olan genel bir dönüşüm matrisi elde edilir. Bu matriste 9 adet dönme ($r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}$ ve r_{33}) ve 3 adet de konum (p_x, p_y ve p_z) belirten toplam 12 elemanı bulunur

İleri Kinematik Problemlerinin Çözümünde Kullanılan Yaklaşımlar

Geometrik Yaklaşım

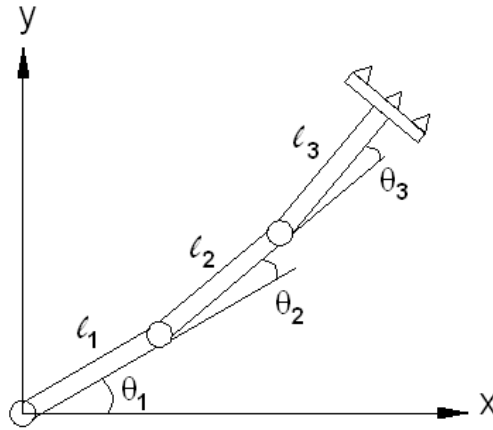
Bu yaklaşım manipülatör duruşuna bağlı olarak oluşan geometrik şekilden yararlanır.

Cebirsel Yaklaşım

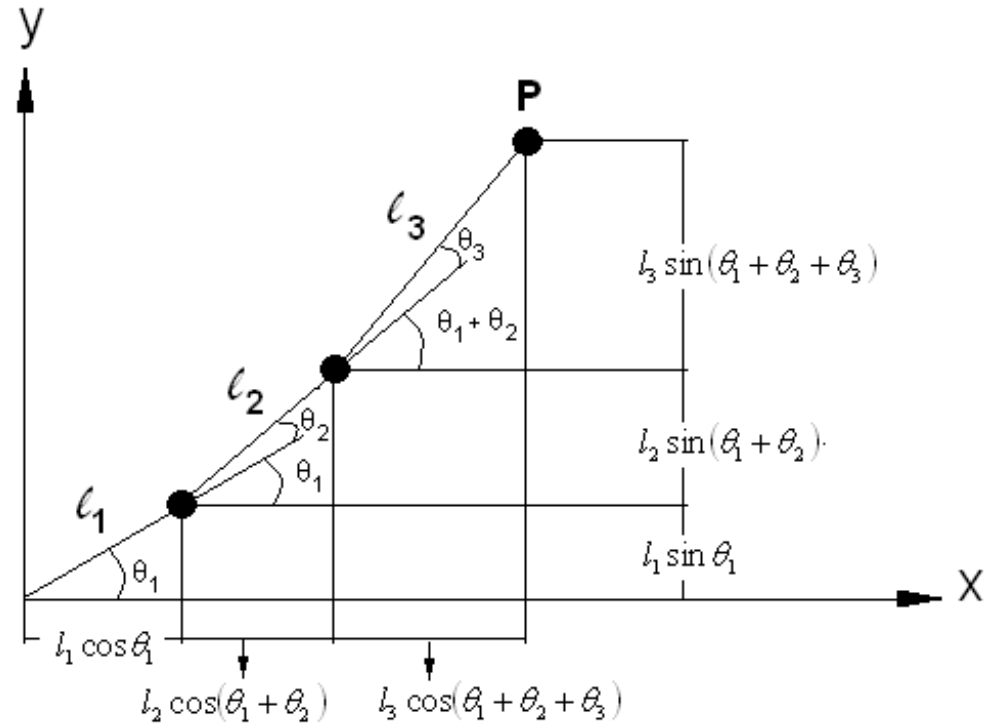
Bu yaklaşım manipülatörün parametreleri ve eklem değişkenleri arasındaki cebirsel ilişkilerden yararlanır



İki boyutlu düzlemde hareket eden robot kolunun geometrik yaklaşım kullanılarak ileri yön kinematiğinin bulunması



Öncelikle robotun iki boyutlu düzlemde aldığı şekil çizilerek uç işlevcisini ifade eden P noktasının konumu bulunur.





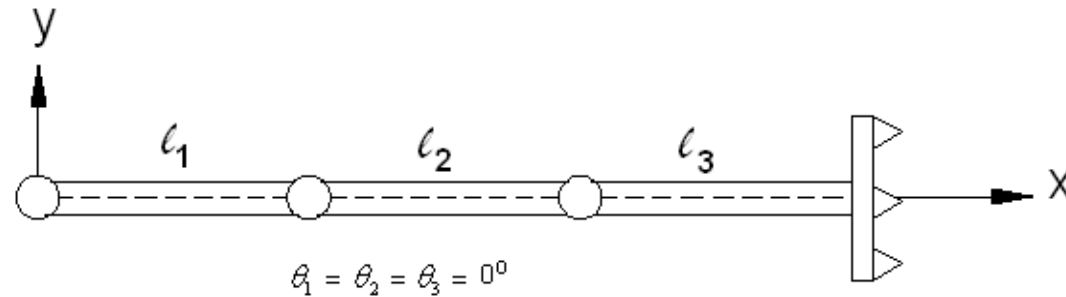
P noktasının X Eksenindeki izdüşümü

$$P_x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

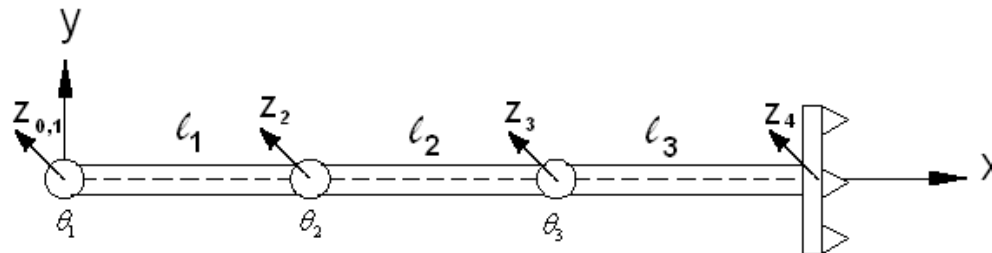
P noktasının Y Eksenindeki izdüşümü

$$P_y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Aynı kolun ileri yön kinematiğini D-H yöntemi ile bulalım.
Öncelikle kolun başlangıç değerlerine göre eklemlere koordinat sistemleri yerleştirilir.

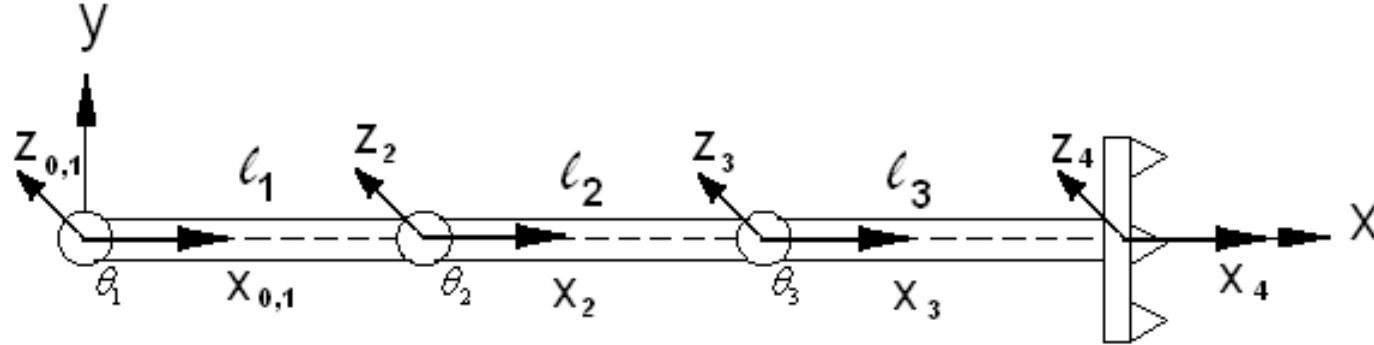


İkinci adımda dönme eklemlerine Z eksenleri yerleştirilir.

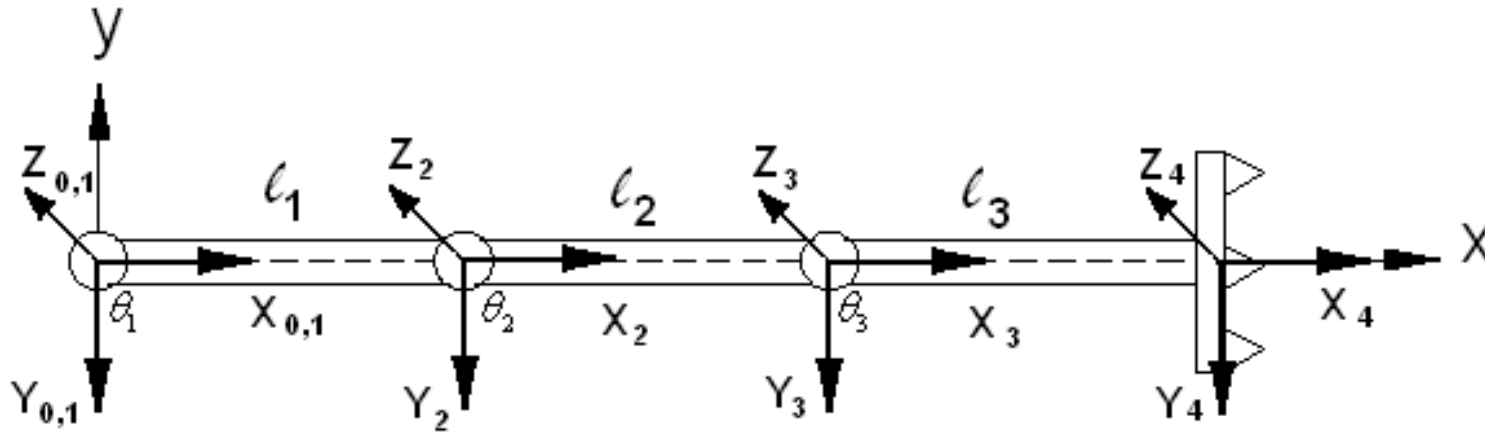




Üçüncü adımda Z eksenine dik ve uzuv boyunca uzanan X eksenleri yerleştirilir.



Dördüncü adımda Sağ El kuralına göre Y eksenleri yerleştirilir.



Son adımda da Koordinat sistemleri eklemlere yerleştirildikten sonra D-H değişkenleri belirlenir ve tabloya eklenir.



Öncelikle D-H değişkenlerinden sabit olan parametreler belirlenir.

$Z_{0,1}, Z_2, Z_3$ ve Z_4 , eksenlerinin dönme yönleri aynı olduğundan

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ve α_3 açıları 0 'dır. Z_0 ile Z_1 arasında X_1 boyunca uzanan herhangi bir bağ uzunluğu olmadığından $a_0=0$

Eksen No	D-H Değişkenleri				Eklem Değişkeni
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1	θ_1
2	0	l_1 Z_1 ile Z_2 arası	0	θ_2	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3	θ_3
4	0	l_3	0	0	0



Elde edilen tabloya göre her ekleme ait değişkenleri aşağıdaki genel matriste yerine koyarak dönüşüm matrislerini bulalım.

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Birinci eklem için dönüşüm matrisi

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_0 \\ \sin \theta_1 \cos \alpha_0 & \cos \theta_1 \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & -\sin \alpha_0 d_1 \\ \sin \theta_1 \sin \alpha_0 & \cos \theta_1 \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & \cos \alpha_0 d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

İkinci eklem için dönüşüm matrisi

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_1 \\ \sin \theta_2 \cos \alpha_1 & \cos \theta_2 \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & -\sin \alpha_1 d_2 \\ \sin \theta_2 \sin \alpha_1 & \cos \theta_2 \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Üçüncü eklem için dönüştürme matrisi

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_2 \\ \sin \theta_3 \cos \alpha_2 & \cos \theta_3 \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_2 d_3 \\ \sin \theta_3 \sin \alpha_2 & \cos \theta_3 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dördüncü eklem için dönüştürme matrisi

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & a_3 \\ \sin \theta_4 \cos \alpha_2 & \cos \theta_4 \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & -\sin \alpha_3 d_4 \\ \sin \theta_4 \sin \alpha_2 & \cos \theta_4 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & \cos \alpha_3 d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Elde edilen dört ekleme ait dönüşüm matrisleri birbirleriyle çarpılarak manipülatöre ait dönüşüm matrisi elde edilir.

$${}^0_4T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & -s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & 0 & l_3(c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3) + l_2c(\theta_1 + \theta_2) + l_1c\theta_1 \\ s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & 0 & l_3(s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3) + l_2s(\theta_1 + \theta_2) + l_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

elde edilen dönüşüm matrisinin konum vektöründen

$$P_x = l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1$$

$$P_y = l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin \theta_1$$

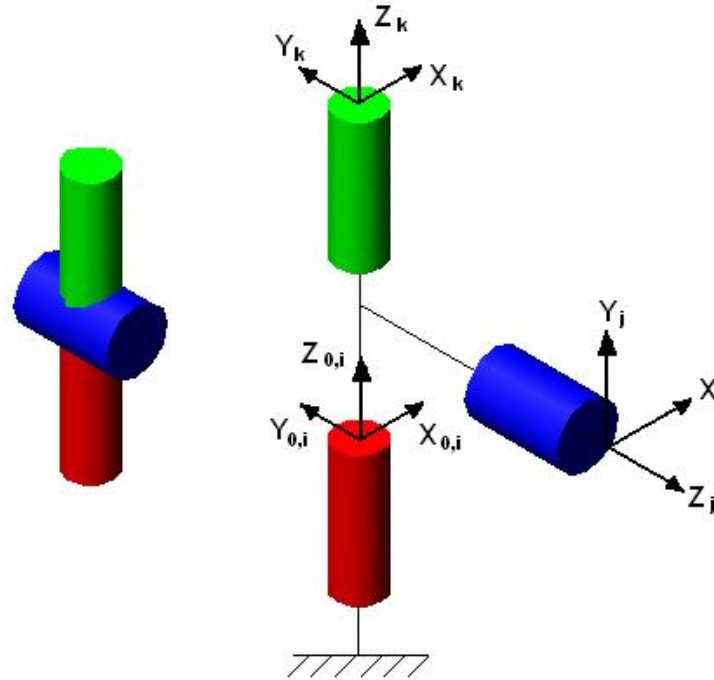
Denklemleri elde edilir.



Robotlarda Kullanılan Bilek Düzenleşimleri

Endüstriyel robotlarda Euler ve eklem kaçıklıklı bilek olmak üzere iki tip bilek düzenleşimi kullanılır. Euler bilekli düzenleşimde üç eksen bir noktada kesişirken eklem kaçıklıklı bilekte eklemlerin kesişmesi eklem kayması ve uzuv uzunlukları ile engellenir.

Euler Bileklik Düzenleşimin İleri Yön Kinematiği





Öncelikle D-H Değişkenlerine ait tablo oluşturulur

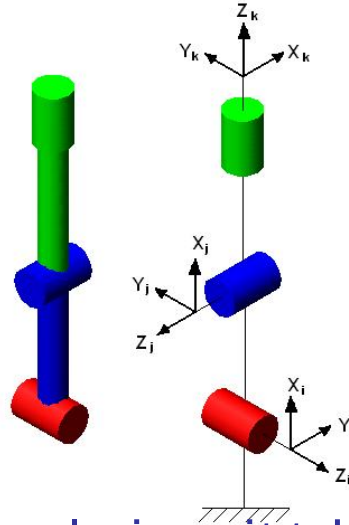
Eksen No	D-H Değişkenleri				Eklem Değişkeni
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i Veya θ_i
1	0	0	0	θ_i	θ_i
2	90	0	0	θ_j	θ_j
3	-90	0	0	θ_k	θ_k

Bu tabloya göre de bilek düzenlemesine ait ileri yön kinematiğine ait dönüşüm matrisi bulunur.

$$\begin{aligned}
 {}^0_k T &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_j & c\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_k & -c\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i c\theta_j c\theta_k - s\theta_i s\theta_k & -c\theta_i c\theta_j s\theta_k - s\theta_i c\theta_k & -c\theta_i s\theta_j & 0 \\ s\theta_i c\theta_j c\theta_k + c\theta_i s\theta_k & -s\theta_i c\theta_j s\theta_k + c\theta_i c\theta_k & -s\theta_i s\theta_j & 0 \\ s\theta_j c\theta_k & -s\theta_j s\theta_k & s\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Eklem Kaçıklıklı Bileklik Düzenleşiminin İleri Yön Kinematiği



Öncelikle D-H Değişkenlerine ait tablo oluşturulur

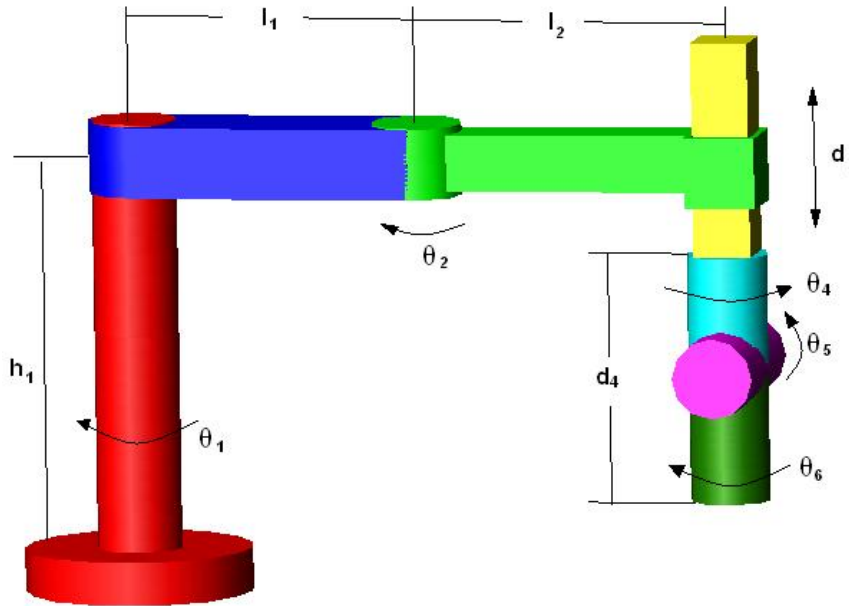
Eksen No	D-H Değişkenleri				Eklem Değişkeni
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i Veya θ_i
1	0	0	0	θ_i	θ_i
2	90	a	0	θ_j	θ_j
3	-90	0	d	θ_k	θ_k



Bu tabloya göre de bilek düzenlemesine ait ileri yön kinematiğine ait dönüşüm matrisi bulunur.

$${}^0_kT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_j & c\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ -s\theta_k & -c\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c\theta_i c\theta_j c\theta_k - s\theta_i s\theta_k & -c\theta_i c\theta_j s\theta_k - s\theta_i c\theta_k & -c\theta_i s\theta_j & d(-c\theta_i s\theta_j) + d(c\theta_i) \\ s\theta_i c\theta_j c\theta_k + c\theta_i s\theta_k & -s\theta_i c\theta_j s\theta_k + c\theta_i c\theta_k & -s\theta_i s\theta_j & d(-s\theta_i s\theta_j) - d(s\theta_i) \\ s\theta_j c\theta_k & -s\theta_j s\theta_k & s\theta_j & d(c\theta_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Altı Serbestlik Derecesine Sahip Robotun İler Yön Kinematiği
Endüstriyel robotlara Euler veya eklem kaçıklıklı bilek eklendiğinde 6 serbestlik dereceli robotlar elde edilir. Euler bileklikli robotlar endüstride hafif yüklerde tercih edilirken, eklem kaçıklıklı robotlar ağır yüklerin kaldırılması gibi işlemlerde tercih edilir.



Scara diye tanımlanan altı serbestlik dereceli robotun ileri yön kinematiğini bulalım

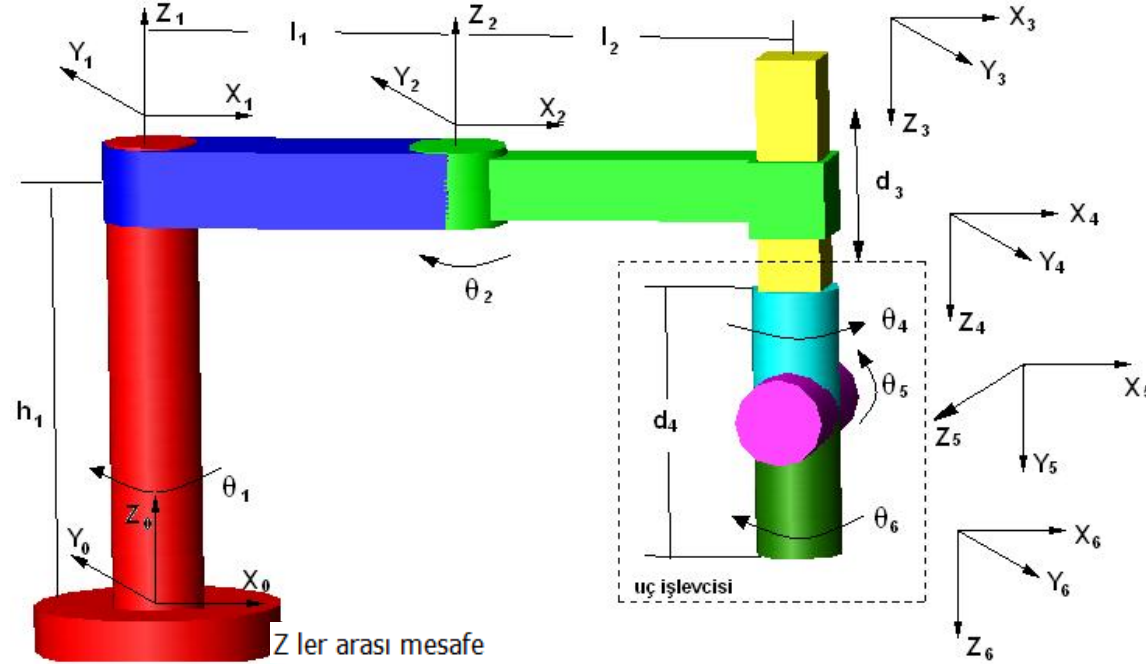


TEMEL ROBOTİK

Ders sorumlusu: Yrd.Doç.Dr.Hilmi KUŞÇU



Öncelikle koordinat sistemlerini her bir ekleme yerleştirelim ve ardından D-H parametrelerine ait tabloyu oluşturalım.



2 komşu eksen açısı	Uzuv Uzunluğu	Ekleme kaçıklığı	Ekleme açısı
---------------------	---------------	------------------	--------------

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	Değişken
1	0	0	h_1	θ_1	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2	θ_2
3	180	l_2	d_3	0	d_3
4	0	0	d_4	θ_4	θ_4
5	-90	0	0	θ_5	θ_5
6	90	0	0	θ_6	θ_6



Her ekleme ait dönüşüm matrisleri bulunur

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} (c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 + s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)c\theta_5c\theta_6 - (c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)s\theta_6 \\ (s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 - c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)c\theta_5c\theta_6 - (s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)s\theta_6 \\ s\theta_5c\theta_6 \\ 0 \\ - (c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 + s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)c\theta_5s\theta_6 - (c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)c\theta_6 \\ - (s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 - c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)c\theta_5s\theta_6 - (s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)c\theta_6 \\ - s\theta_5c\theta_6 \\ 0 \\ - (c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 + s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)s\theta_5l_2c(\theta_1 + \theta_2) + l_1c\theta_1 \\ - (s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_4 - c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_4)s\theta_5l_2s(\theta_1 + \theta_2) + l_1s\theta_1 \\ - c\theta_6 \\ 0 \\ h_1 - d_3 - d_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ters Kinematik

Robotun uç işlevcisinin ana çerçeveye göre konumu ve yönelimi verildiğinde manipülatörün bu konuma ve yönetime gelebilmesi için gerekli eklem değişkenlerinin bulunmasıdır.

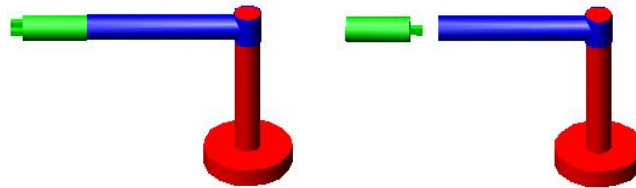
Başka bir deyişle de uç işlevcisinin konum ve yönelimini kartezyen koordinat sisteminden eklem koordinat sistemine dönüştürme işlemi olarak da tanımlayabiliriz.





Ters kinematik aşağıdaki nedenlerden dolayı çözülmesi oldukça zor olan problemler içerir.

- Analitik olarak karmaşık, doğrusal olmayan denklemler içerir.
- Eklemlerin yapısına bağlıdır. Eğer robot prizmatik eklemlerden oluşuyorsa ters kinematik problemin çözümü kolaylaşırken, robottaki döner eklem sayısı arttıkça problemin çözümü de o derece zorlaşmaktadır.
- Her zaman matematiksel çözüm fiziksel çözümü temsil etmez. Birinci şekilde matematiksel çözümle fiziksel çözüm örtüşürken ikinci şekilde örtüşmez

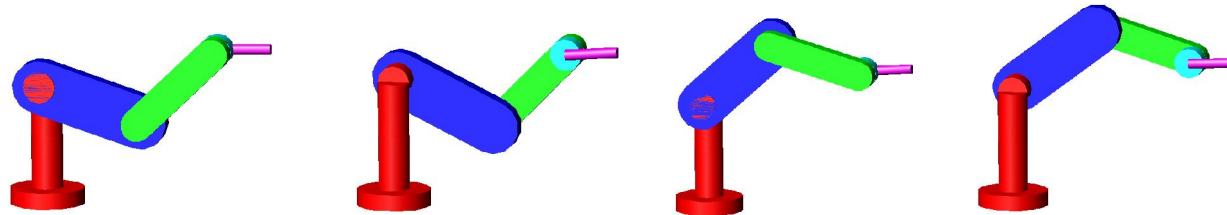


$$\theta = \arctan2(-k, p_z) \quad \theta = \arctan2(k, -p_z)$$



- Aynı uç işlevci düzenleşimi için birden fazla çözüm olabilir. Ters kinematik çözüm sayısı robotun serbestlik derecesinin yanında aynı zamanda eklem değişkenlerine de bağlıdır. Her bir eklemden uzuv uzunluğu ve eklem kaçıklılığının olması çözüm sayısının artmasına neden olur. Örneęin 6R robotta her bir eklem için en azından bir uzuv uzunluğu ve eklem kaçıklılığı olduğundan ters kinematik çözüm sayısı $2^6 = 64$ 'dür.

Yalnız bu çözümlerin bir kısmı gerçek bir kısmı ise sanaldır. Dönel eklemlerden oluşan robotlarda fiziksel çözüm sayısının fazla olması, üç boyutlu uzayda bir noktaya birkaç şekilde ulaşma imkânı sağlar. Örneęi PUMA robotunun aynı noktaya dört farklı şekilde erişebildiğini gösterir.





Ters Kinematik Problemlerine Analitik Çözüm Yaklaşımı
Craig tarafından tanımlanan altı serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematiği aşağıdaki gibi yazılır.

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

${}^0T_1 = I$ olduğundan yukarıdaki denklem daha basit bir ifadeyle elde edilebilir.

$$\left[{}^0T_1 \right]^{-1} {}^0T_6 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$$\left[{}^0T_1 {}^1T_2 \right]^{-1} {}^0T_6 = {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$$\left[{}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \right]^{-1} {}^0T_6 = {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$$\left[{}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 \right]^{-1} {}^0T_6 = {}^4T_5 {}^5T_6$$

$$\left[{}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 \right]^{-1} {}^0T_6 = {}^5T_6$$



Ters kinematik çözüm gerçekleştirilirken kullanılan bazı trigonometrik eşitlikler.

$$\cos \theta = a \quad \text{ise} \quad \theta = \arctan 2\left(\pm \sqrt{1-a^2}, a\right)$$

$$\sin \theta = a \quad \text{ise} \quad \theta = \arctan 2\left(a, \pm \sqrt{1-a^2}\right)$$

$$\cos \theta = a \quad \text{ve} \quad \sin \theta = b \quad \text{ise} \quad \theta = \arctan 2(b, a)$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = 0 \quad \text{ise}$$

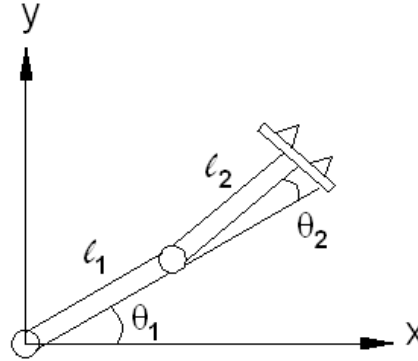
$$\theta = \arctan 2(-b, a) \quad \text{veya} \quad \theta = \arctan 2(b, -a)$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = c \quad \text{ise}$$

$$\theta = \arctan 2(a, b) + \theta = \arctan 2\left(\pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c\right)$$



Örnek



$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_3T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T$$

İleri yön kinematiğine ait dönüşüm matrisinin her iki tarafını $[{}^0_1T]^{-1}$ ile çarpalım.

$$[{}^0_1T]^{-1} {}^0_3T = [{}^0_1T]^{-1} {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T$$



Bilindiği gibi ${}^0_1T^{-1} {}^0_1T = I$ olduğundan denklem aşağıdaki gibi olur.

$${}^0_1T^{-1} {}^0_3T = {}^1_2T {}^2_3T$$

$${}^0_1T^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0_1R^T & -{}^0_1R^T {}^0_1P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1R^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0_1T Dönüşüm matrisinin konum vektörü sıfır olduğundan

$$-{}^0_1R^T {}^0_1P_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.



Bu matrisi 0_3T ileri kinematiği temsil eden matrisle çarpalım

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T^{-1} {}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 r_{11} + \sin \theta_1 r_{21} & \cos \theta_1 r_{12} + \sin \theta_1 r_{22} & \cos \theta_1 r_{13} + \sin \theta_1 r_{23} & \cos \theta_1 p_x + \sin \theta_1 p_y \\ -\sin \theta_1 r_{11} + \cos \theta_1 r_{21} & -\sin \theta_1 r_{12} + \cos \theta_1 r_{22} & -\sin \theta_1 r_{13} + \cos \theta_1 r_{23} & -\sin \theta_1 p_x + \cos \theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



${}^0_1T^{-1}{}^0_3T$ Çarpımını bulduk. Şimdide ${}^1_2T {}^2_3T$

çarpımını bulalım ve iki sonucu birbirine eşitleyelim.

$${}^1_2T {}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 + l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bulunur.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 r_{11} + \sin \theta_1 r_{21} & \cos \theta_1 r_{12} + \sin \theta_1 r_{22} & \cos \theta_1 r_{13} + \sin \theta_1 r_{23} & \cos \theta_1 p_x + \sin \theta_1 p_y \\ -\sin \theta_1 r_{11} + \cos \theta_1 r_{21} & -\sin \theta_1 r_{12} + \cos \theta_1 r_{22} & -\sin \theta_1 r_{13} + \cos \theta_1 r_{23} & -\sin \theta_1 p_x + \cos \theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 + l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



1. $\cos \theta_1 r_{11} + \sin \theta_1 r_{21} = \cos \theta_2$
2. $-\sin \theta_1 r_{11} + \cos \theta_1 r_{21} = \sin \theta_2$
3. $r_{31} = 0$
4. $\cos \theta_1 r_{12} + \sin \theta_1 r_{22} = -\sin \theta_2$
5. $-\sin \theta_1 r_{12} + \cos \theta_1 r_{22} = \cos \theta_2$
6. $r_{32} = 0$
7. $\cos \theta_1 r_{13} + \sin \theta_1 r_{23} = 0$
8. $-\sin \theta_1 r_{13} + \cos \theta_1 r_{23} = 0$
9. $r_{33} = 1$
10. $\cos \theta_1 P_x + \sin \theta_1 P_y = l_2 \cos \theta_2 + l_1$
11. $-\sin \theta_1 P_x + \cos \theta_1 P_y = l_2 \sin \theta_2$
12. $P_z = 0$

Eşitlikleri elde edilir.



Ters kinematik çözümün tamamı mümkünse kol uzunlukları cinsinden elde edilmelidir. Bu nedenle 10. ve 11. denklemlerin her iki tarafının karesini alıp alt alta toplayalım.

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_1 P_x^2 + \sin^2 \theta_1 P_y^2 &= l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 \\ + \quad (-\sin \theta_1)^2 P_x^2 + \cos^2 \theta_1 P_y^2 &= l_2^2 \sin^2 \theta_2 \\ \hline \cos^2 \theta_1 P_x^2 + \sin^2 \theta_1 P_y^2 + \sin^2 \theta_1 P_x^2 + \cos^2 \theta_1 P_y^2 &= l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 + l_2^2 \sin^2 \theta_2 \end{aligned}$$

Eşitliğin sol tarafını P_x^2 ve P_y^2 , sağ tarafını da l_2^2 parantezine alalım.

$$(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) P_x^2 + (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) P_y^2 = l_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2$$

$$(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = 1 \quad \text{'dir.}$$



Bu durumda denklemi yeniden yazarsak

$$P_x^2 + P_y^2 = l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 \quad \text{olur.}$$

Buradan $\cos \theta_2 = \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - (l_2^2 + l_1^2)}{2l_1l_2} \right)$ bulunur.

Bunu $\cos \theta = a$ ise $\theta = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{1-a^2}, a \right)$ denklemine uyarlarsak

$$\theta_2 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - (l_2^2 + l_1^2)}{2l_1l_2} \right)^2}, \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - (l_2^2 + l_1^2)}{2l_1l_2} \right) \right) \quad \text{bulunur.}$$



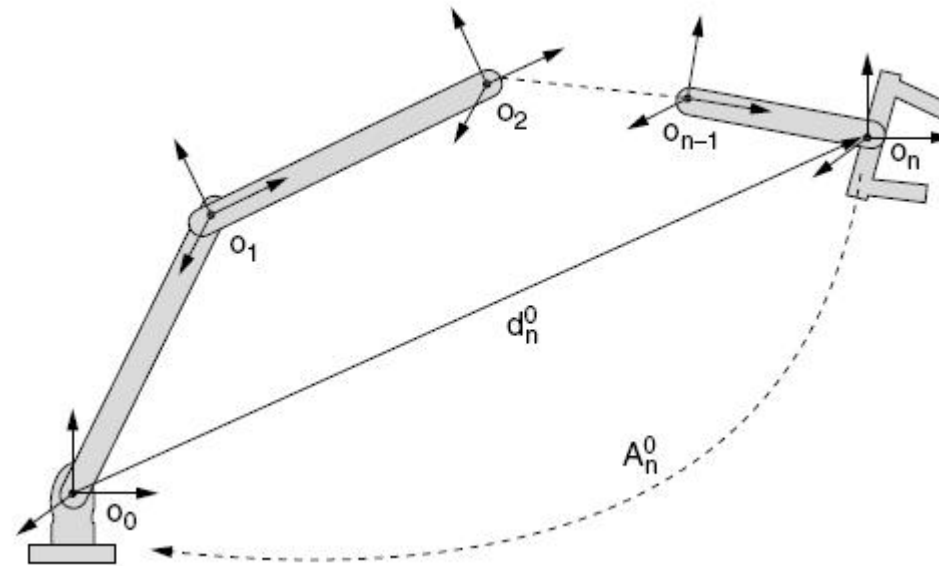
$$\cos \theta_1 P_x + \sin \theta_1 P_y = l_2 \cos \theta_2 + l_1$$

Bu ifadeyi de $a \sin \theta + b \cos \theta = c$ 'e uyarlarsak

$$P_x = a, P_y = b, l_2 \cos \theta_2 + l_1 = c \quad \text{Olur.}$$

$$\theta = \arctan 2(a, b) \pm \theta = \arctan 2\left(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c\right)$$

$$\theta_1 = \arctan 2(P_y, P_x) \pm \theta = \arctan 2\left(\sqrt{P_y^2 + P_x - (l_2 \cos \theta_2 + l_1)^2}, (l_2 \cos \theta_2 + l_1)\right) \quad \text{elde edilir.}$$



Transformation from the endeffector frame to the base frame.

$$A_n^0 = A_1^0 A_2^1 \dots A_n^{n-1} = \begin{bmatrix} R_n^0 & d_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_n^0 = (U_1 V_1)(U_2 V_2) \dots (U_n V_n),$$

$$s_i = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix}$$

$$U_i s_i = \begin{bmatrix} c\theta_i a_i \\ s\theta_i a_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

$$U_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & +c\alpha_i \end{bmatrix}$$

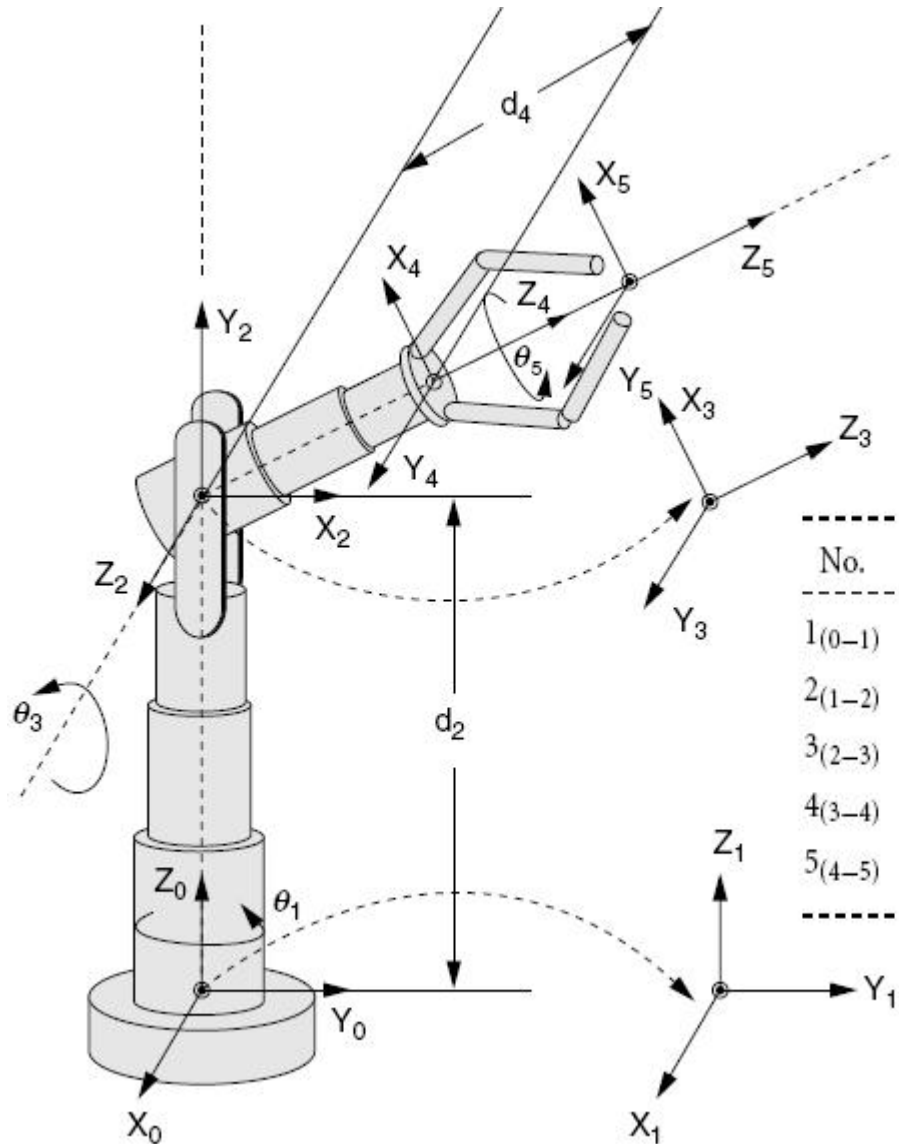
$$U_i V_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & +c\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$d_n^0 = U_1 s_1 + U_1 V_1 U_2 s_2 + U_1 V_1 U_2 V_2 U_3 s_3 \dots + U_1 V_1 U_2 V_2 \dots U_{n-1} V_{n-1} U_n s_n$$



Example 8.1

Figure 8.6 is an example of a robotic arm manipulator with five joints. In this manipulator, three joints are rotational and two joints are prismatic. Thus, the robot has five degrees of freedom.



No.	Twist Angle α_i	Link Length a_i	Joint Offset d_i	Joint Angle θ_i
1(0-1)	0	0	0	$\theta_1^{\text{Variable}}$
2(1-2)	$\pi/2$	0	d_2^{Variable}	0
3(2-3)	$\pi/2$	0	0	$\theta_3^{\text{Variable}}$
4(3-4)	0	0	d_4^{Variable}	0
5(4-5)	0	0	0	$\theta_5^{\text{Variable}}$



$$R_5^0 = (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3)(U_4 V_4)(U_5 V_5)$$

$$d_5^0 = U_1 s_1 + (U_1 V_1) U_2 s_2 + (U_1 V_1)(U_2 V_2) U_3 s_3 + (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3) U_4 s_4 \\ + (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3)(U_4 V_4) U_5 s_5$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_5 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix}, \quad s_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$R_5^0 = \begin{bmatrix} C_1 C_3 C_5 + S_1 S_5 & -C_1 C_3 S_5 + S_1 C_5 & C_1 S_3 \\ S_1 C_3 C_5 - C_1 S_5 & -S_1 C_3 S_5 - C_1 C_5 & S_1 S_3 \\ S_3 C_5 & -S_3 S_5 & -C_3 \end{bmatrix}$$

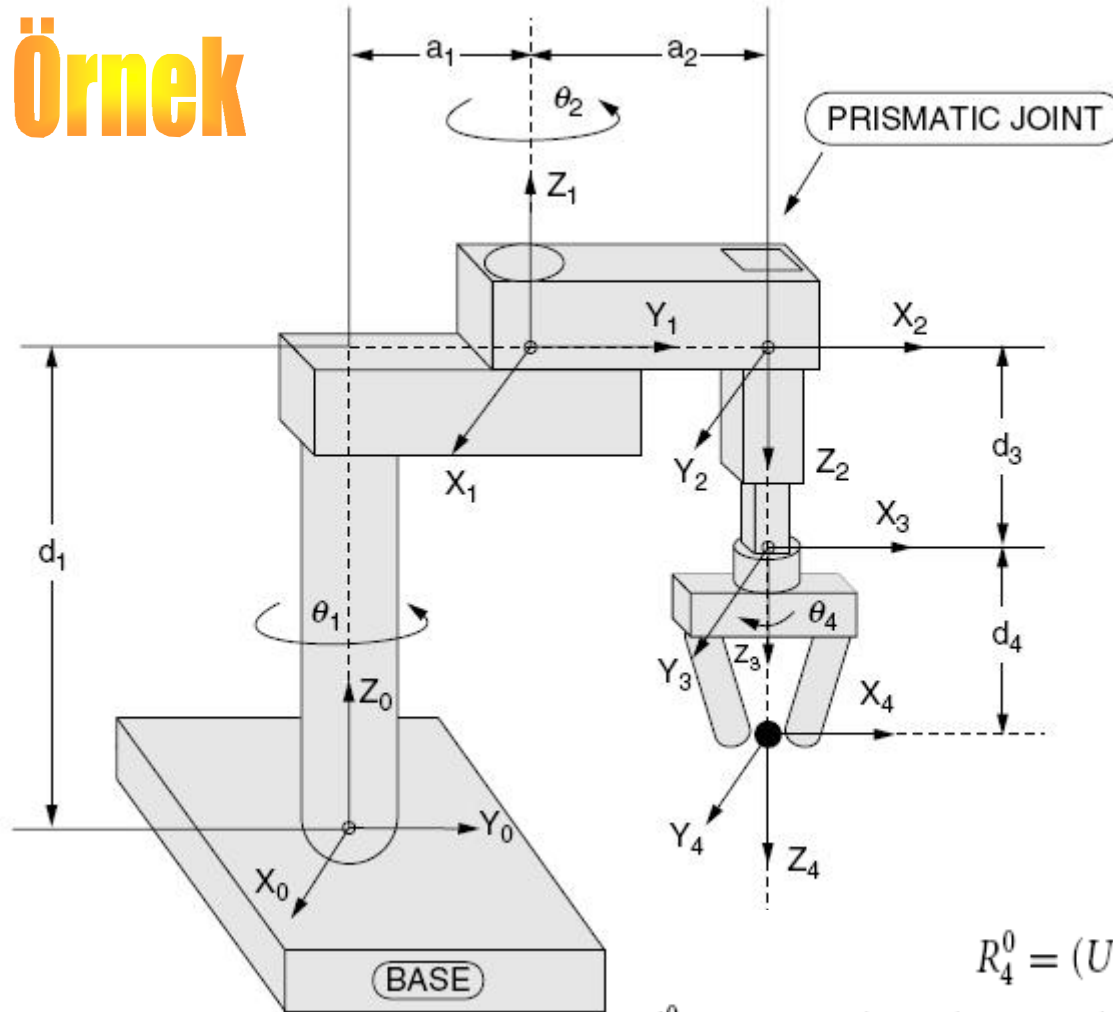
$$d_5^0 = \begin{bmatrix} C_1 S_3 d_4 \\ S_1 S_3 d_4 \\ d_2 - C_3 d_4 \end{bmatrix}$$

$$A_n^0 = A_1^0 A_2^1 \dots A_n^{n-1} = \begin{bmatrix} R_n^0 & d_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^0 = \begin{bmatrix} C_1 C_3 C_5 + S_1 S_5 & -C_1 C_3 S_5 + S_1 C_5 & C_1 S_3 & C_1 S_3 d_4 \\ S_1 C_3 C_5 - C_1 S_5 & -S_1 C_3 S_5 - C_1 C_5 & S_1 S_3 & S_1 S_3 d_4 \\ S_3 C_5 & -S_3 S_5 & -C_3 & d_2 - C_3 d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z_0 direction so the offset is equal to d_1 . There is also a distance between the axes, which is equal to a_1 . For axis 2, there is a distance between axes 2 and 3 away from the Z_1 axis equal to a_2 . d_2 is equal to zero. Axis 3 is a prismatic joint, so d is variable, i.e., d_3^{Variable} . Between axes 3 and 4, there is an offset only in the Z direction, so d_4 is equal to this distance. a_3 and a_4 are both zero.

Örnek



Eksen no	Eksen açısı (z'ler arası) α_i	Eklemlenme uzunluğu (z'ler arası) a_i	Eklemlenme kaçıklığı (x'ler arası) d_i	Eklemlenme açısı (Z'etrafında) θ_i
1 (0-1)	0	a_1	d_1	θ_1
2 (1-2)	π (180°)	a_2	0	θ_2
3 (2-3)	0	0	d_3	0
4 (3-4)	0	0	d_4	θ_4

$$R_4^0 = (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3)(U_4 V_4)$$

$$d_4^0 = U_1 s_1 + (U_1 V_1) U_2 s_2 + (U_1 V_1)(U_2 V_2) U_3 s_3 + (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3) U_4 s_4$$



$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

$$U_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & +c\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$s_i = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix}$$



TEMEL ROBOTİK

Ders sorumlusu: Yrd.Doç.Dr.Hilmi KUŞÇU



$$R_4^0 = \begin{bmatrix} C_{12}C_4 + S_{12}S_4 & -C_{12}S_4 + S_{12}C_4 & 0 \\ S_{12}C_4 - C_{12}S_4 & -S_{12}S_4 - C_{12}C_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d_4^0 = \begin{bmatrix} C_1a_1 + C_{12}a_2 \\ S_1a_1 + S_{12}a_2 \\ d_1 - d_3 - d_4 \end{bmatrix}$$

where $C_a = \cos(a)$, $S_a = \sin(a)$, $C_{ab} = \cos(a + b)$ and $S_{ab} = \sin(a + b)$.

$$A_4^0 = \begin{bmatrix} C_{12}C_4 + S_{12}S_4 & -C_{12}S_4 + S_{12}C_4 & 0 & C_1a_1 + C_{12}a_2 \\ S_{12}C_4 - C_{12}S_4 & -S_{12}S_4 - C_{12}C_4 & 0 & S_1a_1 + S_{12}a_2 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

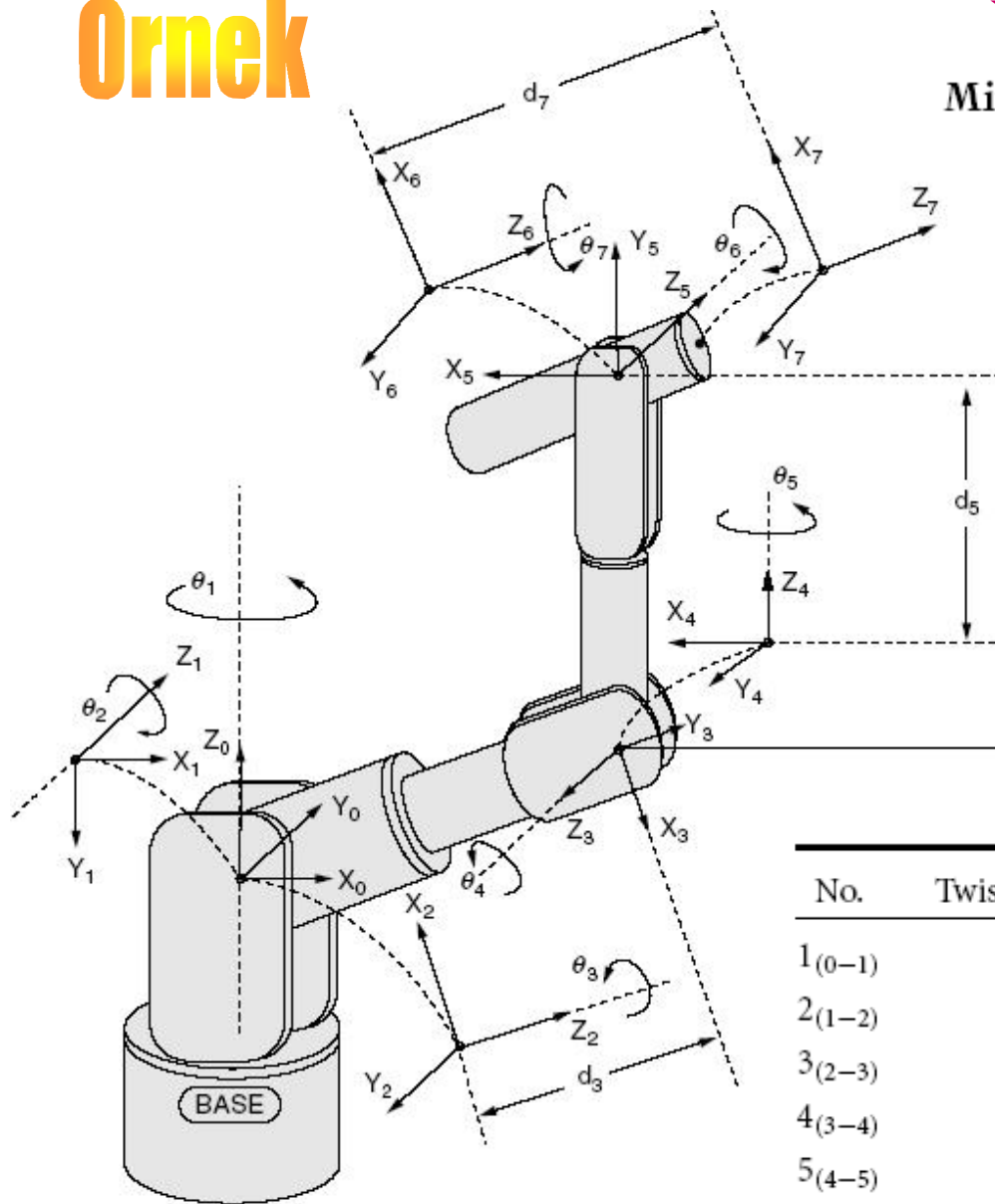
Örnek

TEMEL ROBOTİK

Ders sorumlusu: Yrd.Doç.Dr.Hilmi KUŞÇU



Mitsubishi PA-10 Robot Arm



No.	Twist Angle α_i	Link Length a_i	Joint Offset d_i	Joint Angle θ_i
1(0-1)	$-\pi/2$	0	0	$\theta_1^{\text{Variable}}$
2(1-2)	$-\pi/2$	0	0	$\theta_2^{\text{Variable}}$
3(2-3)	$\pi/2$	0	d_3	$\theta_3^{\text{Variable}}$
4(3-4)	$\pi/2$	0	0	$\theta_4^{\text{Variable}}$
5(4-5)	$\pi/2$	0	d_5	$\theta_5^{\text{Variable}}$
6(5-6)	$-\pi/2$	0	0	$\theta_6^{\text{Variable}}$
7(6-7)	0	0	d_7	$\theta_7^{\text{Variable}}$



$$R_7^0 = (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3)(U_4 V_4)(U_5 V_5)(U_6 V_6)(U_7 V_7)$$

$$\begin{aligned} d_7^0 = & U_1 s_1 + (U_1 V_1) U_2 s_2 + (U_1 V_1)(U_2 V_2) U_3 s_3 + (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3) U_4 s_4 \\ & + (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3)(U_4 V_4) U_5 s_5 + (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3)(U_4 V_4)(U_5 V_5) U_6 s_6 \\ & + (U_1 V_1)(U_2 V_2)(U_3 V_3)(U_4 V_4)(U_5 V_5)(U_6 V_6) U_7 s_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & V_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & U_4 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & V_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ U_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & V_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & U_5 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & V_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ U_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & V_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & U_6 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 \\ \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & V_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ s_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & s_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & s_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}, & U_7 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_7) & -\sin(\theta_7) & 0 \\ \sin(\theta_7) & \cos(\theta_7) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & V_7 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ s_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & s_5 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_5 \end{bmatrix}, & s_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & s_7 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$R_7^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = (((C_1C_2C_3 + S_1S_3)C_4 - C_1S_2S_4)C_5 + (C_1C_2S_3 - S_1C_3)S_5)C_6 + ((C_1C_2C_3 + S_1S_3)S_4 + C_1S_2C_4)S_6)C_7 + (-((C_1C_2C_3 + S_1S_3)C_4 - C_1S_2S_4)S_5 + (C_1C_2S_3 - S_1C_3)C_5)S_7$$

$$r_{12} = -(((C_1C_2C_3 + S_1S_3)C_4 - C_1S_2S_4)C_5 + (C_1C_2S_3 - S_1C_3)S_5)C_6 + ((C_1C_2C_3 + S_1S_3)S_4 + C_1S_2C_4)S_6)S_7 + (-((C_1C_2C_3 + S_1S_3)C_4 - C_1S_2S_4)S_5 + (C_1C_2S_3 - S_1C_3)C_5)C_7$$

$$r_{13} = -(((C_1C_2C_3 + S_1S_3)C_4 - C_1S_2S_4)C_5 + (C_1C_2S_3 - S_1C_3)S_5)S_6 + ((C_1C_2C_3 + S_1S_3)S_4 + C_1S_2C_4)C_6$$

$$r_{21} = (((S_1C_2C_3 - C_1S_3)C_4 - S_1S_2S_4)C_5 + (S_1C_2S_3 + C_1C_3)S_5)C_6 + ((S_1C_2C_3 - C_1S_3)S_4 + S_1S_2C_4)S_6)C_7 + (-((S_1C_2C_3 - C_1S_3)C_4 - S_1S_2S_4)S_5 + (S_1C_2S_3 + C_1C_3)C_5)S_7$$

$$r_{22} = -(((S_1C_2C_3 - C_1S_3)C_4 - S_1S_2S_4)C_5 + (S_1C_2S_3 + C_1C_3)S_5)C_6 + ((S_1C_2C_3 - C_1S_3)S_4 + S_1S_2C_4)S_6)S_7 + (-((S_1C_2C_3 - C_1S_3)C_4 - S_1S_2S_4)S_5 + (S_1C_2S_3 + C_1C_3)C_5)C_7$$

$$r_{23} = -(((S_1C_2C_3 - C_1S_3)C_4 - S_1S_2S_4)C_5 + (S_1C_2S_3 + C_1C_3)S_5)S_6 + ((S_1C_2C_3 - C_1S_3)S_4 + S_1S_2C_4)C_6$$

$$r_{31} = (((-S_2C_3C_4 - C_2S_4)C_5 - S_2S_3S_5)C_6 + (-S_2C_3S_4 + C_2C_4)S_6)C_7 + (-(-S_2C_3C_4 - C_2S_4)S_5 - S_2S_3C_5)S_7$$

$$r_{32} = -(((-S_2C_3C_4 - C_2S_4)C_5 - S_2S_3S_5)C_6 + (-S_2C_3S_4 + C_2C_4)S_6)S_7 + (-(-S_2C_3C_4 - C_2S_4)S_5 - S_2S_3C_5)C_7$$

$$r_{33} = -((-S_2C_3C_4 - C_2S_4)C_5 - S_2S_3S_5)S_6 + (-S_2C_3S_4 + C_2C_4)C_6$$



$$d_7^0 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = -C_1 S_2 d_3 + ((C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4 + C_1 S_2 C_4) d_5 + (-(((C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) C_5 + (C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) S_5) S_6 + ((C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4 + C_1 S_2 C_4) C_6) d_7$$

$$d_{21} = -S_1 S_2 d_3 + ((S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_4 + S_1 S_2 C_4) d_5 + (-(((S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) C_5 + (S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) S_5) S_6 + ((S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_4 + S_1 S_2 C_4) C_6) d_7$$

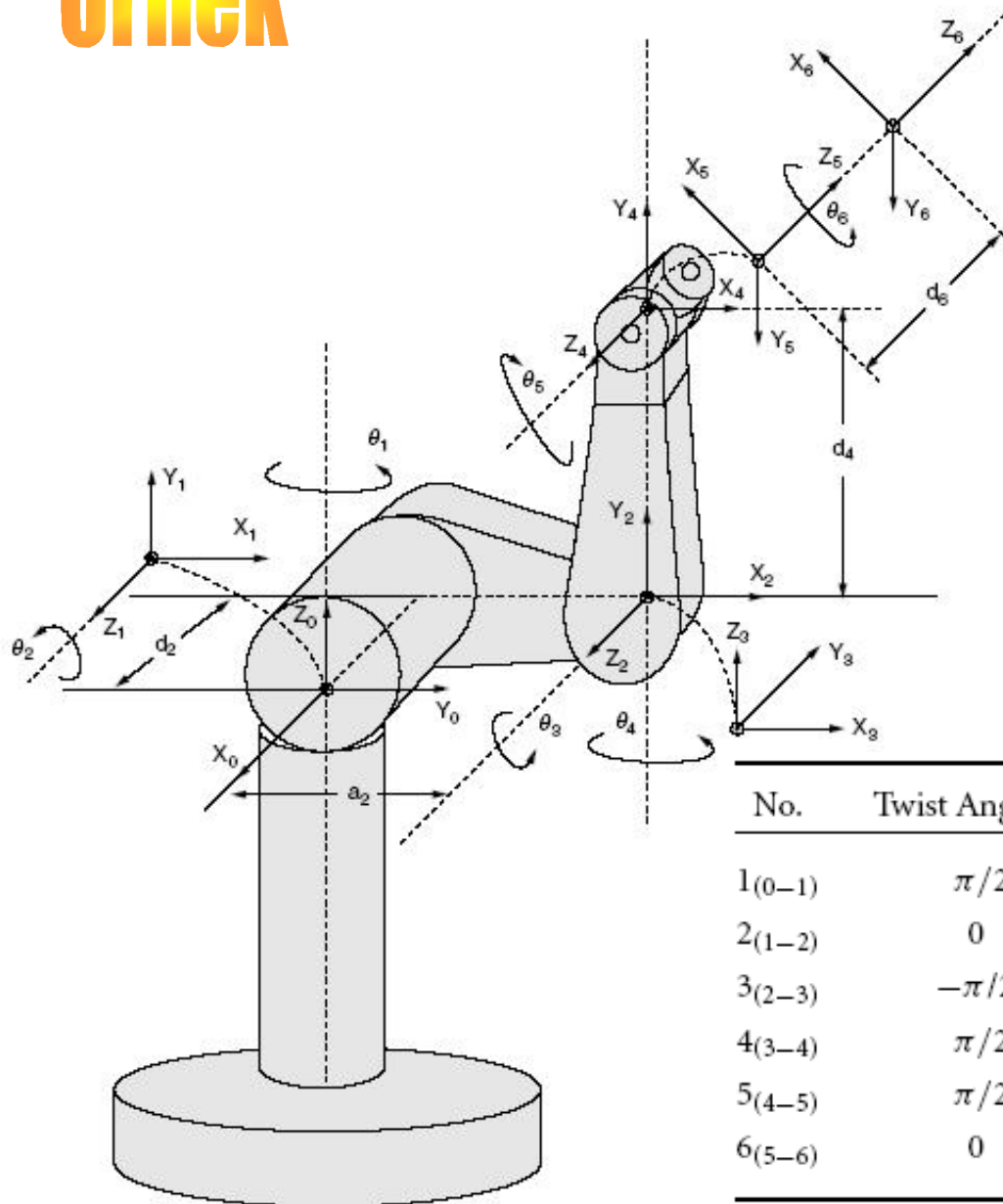
$$d_{31} = -C_2 d_3 + (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) d_5 + (-((-S_2 C_3 C_4 - C_2 S_4) C_5 - S_2 S_3 S_5) S_6 + (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) C_6) d_7$$

$$A_7^0 = \begin{bmatrix} R_7^0 & d_7^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek

TEMEL ROBOTİK

Ders sorumlusu: Yrd.Doç.Dr.Hilmi KUŞÇU



No.	Twist Angle α_i	Link Length a_i	Link Offset d_i	Joint Angle θ_i
1(0-1)	$\pi/2$	0	0	$\theta_1^{\text{Variable}}$
2(1-2)	0	a_2	d_2	$\theta_2^{\text{Variable}}$
3(2-3)	$-\pi/2$	0	0	$\theta_3^{\text{Variable}}$
4(3-4)	$\pi/2$	0	d_4	$\theta_4^{\text{Variable}}$
5(4-5)	$\pi/2$	0	0	$\theta_5^{\text{Variable}}$
6(5-6)	0	0	d_6	$\theta_6^{\text{Variable}}$